21188142: 课程综合实践 II（数据要素市场） **2024-2025 学年短学期**

HW 2: 非合作博弈论基础

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2024 年 7 月 5 日

2.1 纳什均衡的等价定义

定义 2.1 (纳什均衡定义 1) 给定一个博弈，一个策略组合 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡（***Nash equilibrium***），如果对于每个参与人 i，有

$$u_i(s^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

定义 2.2 (纳什均衡定义 2) 如果对于每个参与人 i，s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对，那么策略组合 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡.

证明：纳什均衡的以上两个定义是等价的（注意等价需要互相能导出，最佳应对的定义见 slides，请用严格的数学符号证明，减少语言的描述）.

证明: 分为两个方向证明：

1. 定义 1 ⇒ 定义 2：假设 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡，即对于每个参与人 i，有 $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$，即 $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$，即 s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对.
2. 定义 2 ⇒ 定义 1：假设 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡，即对于每个参与人 i，s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对，即 $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$，即 $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$.

■

2.2 占优、纳什均衡与最大最小的关系

证明：在一个博弈中，如果任意的参与人 i 都有一个严格占优于其它所有策略的策略 s_i^*，那么 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是博弈的唯一均衡点，也是唯一的最大最小策略向量.

证明: 严格占优说明

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \neq s_i^*, \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

这表明 $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$，即 s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对，因此 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡. 由于 s_i^* 是严格占优的，因此没有第二个最优反应，因此 s^* 是唯一的纳什均衡. 而根据严格占优又可以得到 $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$，并且没有另一个可以做到 max 的策略，故 s^* 是唯一的最大最小策略向量. ■

2.3 混合策略纳什均衡

1. 令 $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ 为一个策略型博弈，集合 S_i 都是有限集合. 如果参与人 i 的一个纯策略 $s_i \in S_i$ 被混合策略 $\sigma_i \in \Sigma_i$ 严格占优，证明：在博弈的任一均衡中，参与人 i 选择纯策略 s_i 的概率为 0.

   证明： 详细证明略去；可行的思路是证明任何一个含有这一被占优的策略的混合策略都可以被替换为一个效用更高的不含这一被占优策略的混合策略；也可以说明，将这一占优的混合策略变成新的纯策略加入博弈并不影响博弈的策略选择和效用，因此可以自然地删去被占优的纯策略 ■

2. 利用上一题中的结论，求解下图所示的博弈的混合策略纳什均衡（提示：利用上一题结论构建混合策略占优首先删除两个参与人各一个纯策略，然后利用上课的方法或无差异原则求解即可）.

	L	C	R
T	6, 2	0, 6	4 4
M	2, 12	4, 3	2, 5
B	0, 6	10, 0	2, 2

   不难验证，行参与人的纯策略 M 被混合策略 $(1/2(T), 1/2(B))$ 严格占优，因此可以删去纯策略 M；删去后可以验证列参与人的纯策略 R 被混合策略 $5/12(L), 7/12(C)$ 严格占优，因此可以删去纯策略 R；删去后可以求解 2×2 的混合策略纳什均衡，可以使用上课讲解的方法，也可以使用无差异原则，结果为

$$\left(\left[\frac{3}{5}(T), \frac{2}{5}(B)\right], \left[\frac{5}{8}(L), \frac{3}{8}(C)\right]\right).$$

2.4 零和博弈

考虑下图所示的二人零和博弈：

	L	R
T	5	0
B	3	4

计算博弈的混合策略纳什均衡（提示：零和博弈的混合策略纳什均衡等价于什么）.

二人零和博弈的混合策略 (x^*, y^*) 是纳什均衡当且仅当 x^* 是行参与人的最大最小策略，y^* 是列参与人的最小最大策略. 设 $x^* = (x, 1-x), y^* = (y, 1-y)$，于是有

$$U(x^*, y^*) = 5xy + 3(1-x)y + 4(1-x)(1-y) = 6xy - 4x - y + 4$$

则通过求导、画图等方式不难求得 $x = \arg\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]} 6xy-4x-y+4 = 1/6, y = \arg\min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]} 6xy-4x-y+4 = 2/3$，因此混合策略纳什均衡为

$$\left(\left[\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right], \left[\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right]\right).$$

2.5 相关均衡

证明：一个策略集 $S_1 \times \cdots \times S_n$ 上的概率分布 p 是一个相关均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和任意的交换函数 $\delta_i : S_i \to S_i$，有

$$\mathbf{E}_{s\sim p}[U_i(s)] \geqslant \mathbf{E}_{s\sim p}[U_i(\delta_i(s_i), s_{-i})]$$

其中交换函数不一定是双射，可以是任意的 $S_i \to S_i$ 的映射（提示：可以先将期望展开写，然后仿照课上讲到的相关均衡与粗糙相关均衡的关系证明）.

证明: 将期望展开，实际上是要证明等价条件为对于每个参与人 i 和任意的交换函数 $\delta_i : S_i \to S_i$，有

$$\sum_s p(s)U_i(s) \geqslant \sum_s p(s)U_i(\delta_i(s_i), s_{-i})$$

分成两边证明：

1. $\Rightarrow$：假设 p 是一个相关均衡，即对于每个参与人 i 有

   $$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

   即对于任意的交换函数 $\delta_i : S_i \to S_i$，有

   $$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(\delta_i(s_i), s_{-i}), \forall s_i \in S_i$$

   两边同时对 s_i 求和即可得到题目要证的不等式.

2. $\Leftarrow$：反证法，假设不是相关均衡，那么意味着存在某个参与人 i 和某两个策略 $s_i, s_i' \in S_i$，使得

   $$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) < \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i})$$

取 $\delta(s_j) = \begin{cases} s_i' & \text{if} \quad s_j = s_i \\ s_j & \text{if} \quad s_j \neq s_i \end{cases}$，即 δ 将 s_i 映射到 s_i'，其余取恒等映射，那么有

$$\sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) < \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})$$

将求和号合并后与最前面的不等式矛盾，因此假设不成立，即 p 是一个相关均衡.

$\blacksquare$