21188142: 课程综合实践 II（数据要素市场） **2024-2025 学年短学期**

HW 2: 非合作博弈论基础

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2024 年 7 月 5 日

2.1 纳什均衡的等价定义

定义 2.1 (纳什均衡定义 1) 给定一个博弈，一个策略组合 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡（***Nash equilibrium***），如果对于每个参与人 i，有

$$u_i(s^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

定义 2.2 (纳什均衡定义 2) 如果对于每个参与人 i，s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对，那么策略组合 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡.

证明：纳什均衡的以上两个定义是等价的（注意等价需要互相能导出，最佳应对的定义见 slides，请用严格的数学符号证明，减少语言的描述）.

2.2 占优、纳什均衡与最大最小的关系

证明：在一个博弈中，如果任意的参与人 i 都有一个严格占优于其它所有策略的策略 s_i^*，那么 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 是博弈的唯一均衡点，也是唯一的最大最小策略向量.

2.3 混合策略纳什均衡

1. 令 $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ 为一个策略型博弈，集合 S_i 都是有限集合. 如果参与人 i 的一个纯策略 $s_i \in S_i$ 被混合策略 $\sigma_i \in \Sigma_i$ 严格占优，证明：在博弈的任一均衡中，参与人 i 选择纯策略 s_i 的概率为 0.

2. 利用上一题中的结论，求解下图所示的博弈的混合策略纳什均衡（提示：利用上一题结论构建混合策略占优首先删除两个参与人各一个纯策略，然后利用上课的方法或无差异原则求解即可）.

	L	C	R
T	6, 2	0, 6	4 4
M	2, 12	4, 3	2, 5
B	0, 6	10, 0	2, 2

2.4 零和博弈

考虑下图所示的二人零和博弈：

	L	R
T	5	0
B	3	4

计算博弈的混合策略纳什均衡（提示：零和博弈的混合策略纳什均衡等价于什么）.

2.5 相关均衡

证明：一个策略集 $S_1 \times \cdots \times S_n$ 上的概率分布 p 是一个相关均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和任意的交换函数 $\delta_i : S_i \to S_i$，有

$$\mathbf{E}_{s\sim p}[U_i(s)] \geqslant \mathbf{E}_{s\sim p}[U_i(\delta_i(s_i), s_{-i})]$$

其中交换函数不一定是双射，可以是任意的 $S_i \to S_i$ 的映射（提示：可以先将期望展开写，然后仿照课上讲到的相关均衡与粗糙相关均衡的关系证明）.