21188142: 课程综合实践 II（数据要素市场） **2024-2025 学年短学期**

HW 3: 机制设计与在线学习

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2024 年 7 月 9 日

3.1 DSIC 机制

回忆 DSIC 机制的定义：如果每个参与人诚实报出自己的估值是占优策略，那么这个机制就是 DSIC 的. 根据这一定义回答问题：

1. 证明：第二价格拍卖是 DSIC 的.

   证明见上课 slides.

2. 考虑一个至少有三个竞拍者的单物品拍卖，假设我们将物品分配给报价最高的参与人，收取的费用等于第三高的报价. 这个机制是 DSIC 的吗？证明你的结论.

   不是；如果其他人都如实报价，那么心理价位在其他参与人的第一、第二价格之间的可以选择报高价格，赢下拍卖，但出价是其他参与人的第二价格（也就是整体的第三价格），所以可以盈利，比诚实报价输掉拍卖更好.

3. 假设有 k 个相同的物品以及 $n > k$ 个竞拍者，每个竞拍者最多可以分配 1 个物品. 类比二价拍卖构建一个 DSIC 机制，并证明它的确是 DSIC 的.

   出价最高的 k 个竞拍者获得物品，他们都出第 $k+1$ 高的价格

3.2 简单的拍卖收益计算

考虑单物品拍卖，其中两个竞拍者对物品的估值独立地服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，证明：

1. 二价拍卖（无保留价格）的期望收益为 $\dfrac{1}{3}$；

   实际上就是计算 $\mathbf{E}[\min\{v_1,v_2\}]$，其中 v_1,v_2 是两个竞拍者的估值随机变量. 令 $X=\min\{v_1,v_2\}$，则 X 的分布函数 $F(x)=P(X<x)=P(v_1<x\cup v_2<x)=1-P(v_1\geqslant x\cap v_2\geqslant x)=1-P(v_1\geqslant x)P(v_2\geqslant x)=1-(1-x)^2$，所以密度函数 $p(x)=2(1-x)$，所以 $\mathbf{E}[X]=\int_0^1 xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x(1-x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

2. 二价拍卖（保留价格为 1/2）的期望收益为 $\dfrac{5}{12}$.

   见上课 slides，分成四个区域计算.

3.3 VCG 机制

本题希望证明 VCG 机制的一些性质. 回忆 VCG 机制的支付函数:

$$p_i = \left[\max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)\right] - \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$$

其中 S^* 是最大化包括 i 的社会福利的分配. 等式右端第一项是没有 i 的时候最大的社会福利，第二项是有 i 的时候的最大的社会福利分配下，除了 i 之外所有人的福利之和，即这个差值是 i 的加入对其他人总福利的影响. 事实上，上式显然可以改写为

$$p_i = b_i(S^*) - \left[\sum_{j=1}^{n} b_j(S^*) - \max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)\right]$$

回答以下问题:

1. 证明：VCG 机制是 DSIC 的，即 $b_i = v_i$ 是最优的（本题较困难，可以查阅相关资料寻找证明）;

   假设每个人对分配结果的效用函数为 v_i，报价函数为 b_i，写出每个人的效用

   $$u_i = v_i(S^*) - p_i = \left[v_i(S^*) + \sum_{j \neq i} b_j(S^*)\right] - \left[\max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)\right]$$

   于是等号后第二个括对于参与人 i 是一个常数，因此我们只需要最大化第一项。事实上，根据 VCG 最大化社会福利的目标，这里的 $S^* = \arg\max_{S} \left[b_i(S) + \sum_{j \neq i} b_j(S)\right]$，因此取 $b_i = v_i$ 时就可以同时最大化第一个括号内的值，故 VCG 是 DSIC 的.

2. 证明：VCG 机制中参与人 i 的支付 p_i 至少为 0，至多为 $b_i(S^*)$（这表明 VCG 中每个人至少不会赚钱，并且支付不会大于自己的效用）;

   根据第一个定义式，$p_i \geqslant 0$ 是显然的，因为 $\arg\max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)$，对于所有 $j \neq i$ 是福利最大化的分配，因此比 S^* 具有更高的福利；根据第二个定义式，减号后面的项一定非负，因为最大化 n 个人的社会福利的结果，至少是包含了最大化其中 $n-1$ 个人的结果的.

3. 考虑有三个竞拍者两个物品 A 和 B 的多物品拍卖，第一个竞拍者对同时获得两个物品有估值 1（即 $v_1(AB) = 1$），其余情况均为 0；第二个竞拍者只对赢得物品 A 有估值 1（即 $v_2(A) = v_2(AB) = 1$），其余情况均为 0；第三个竞拍者只对赢得物品 B 有估值 1（即 $v_3(B) = v_3(AB) = 1$），其余情况均为 0.

   (a) 分别计算只有前两个竞拍者时和三个竞拍者全在时的 VCG 机制的结果;

   前两个竞拍者时，$p_A = 1, p_B = 0$（或 $p_A = 0, p_B = 1$，取决于最大化整体福利的分配结果）;
   三个竞拍者全在时，$p_A = p_B = p_C = 0$;

(b) 你能从中总结出什么? 增加一个竞拍者会减少单物品二价拍卖的收益吗?(这一问体现了 VCG 的一个缺陷，除此之外本题的计算也一定让你意识到了 VCG 机制的计算困难性，因此 VCG 机制在现实中并不常用)

增加一个竞拍者会可能减少 VCG 的收益，这容易导致毁约等行为，可能会驱逐某些买家；增加一个竞拍者不会减少单物品二价拍卖的收益，因为二价拍卖的收益是所有人的第二高心理价位，增加竞拍者这个值会单调不减.

3.4 交换遗憾与相关均衡

注：本题为选做题，不做不扣分，做对可用于补充各次作业其他题目的分数.

本题希望你从存在无交换遗憾算法这一事实出发，证明如下定理：

Theorem 3.1 假设每个参与人 i 使用无交换遗憾算法得到决策序列 $\{\sigma_i^t\}_{t=1}^T$，则下面的推荐策略 π^T 收敛于相关均衡：$\pi^T(s) = \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^t(s_i), \forall s \in S$。

你可以参考这个 PPT 中 18 - 24 页的证明，但请不要直接翻译，而是用自己的语言重新组织一遍.