21188142: 课程综合实践 II（数据要素市场） **2024-2025 学年短学期**

HW 3: 机制设计与在线学习

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2024 年 7 月 9 日

3.1 DSIC 机制

回忆 DSIC 机制的定义：如果每个参与人诚实报出自己的估值是占优策略，那么这个机制就是 DSIC 的. 根据这一定义回答问题：

1. 证明：第二价格拍卖是 DSIC 的.
2. 考虑一个至少有三个竞拍者的单物品拍卖，假设我们将物品分配给报价最高的参与人，收取的费用等于第三高的报价. 这个机制是 DSIC 的吗？证明你的结论.
3. 假设有 k 个相同的物品以及 $n > k$ 个竞拍者，每个竞拍者最多可以分配 1 个物品. 类比二价拍卖构建一个 DSIC 机制，并证明它的确是 DSIC 的.

3.2 简单的拍卖收益计算

考虑单物品拍卖，其中两个竞拍者对物品的估值独立地服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，证明：

1. 二价拍卖（无保留价格）的期望收益为 $\frac{1}{3}$；
2. 二价拍卖（保留价格为 1/2）的期望收益为 $\frac{5}{12}$.

3.3 VCG 机制

本题希望证明 VCG 机制的一些性质. 回忆 VCG 机制的支付函数：

$$p_i = \left[\max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)\right] - \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$$

其中 S^* 是最大化包括 i 的社会福利的分配. 等式右端第一项是没有 i 的时候最大的社会福利，第二项是有 i 的时候的最大的社会福利分配下，除了 i 之外所有人的福利之和，即这个差值是 i 的加入对其

他人总福利的影响. 事实上，上式显然可以改写为

$$p_i = b_i(S^*) - \left[\sum_{j=1}^{n} b_j(S^*) - \max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)\right]$$

回答以下问题:

1. 证明：VCG 机制是 DSIC 的，即 $b_i = v_i$ 是最优的（本题较困难，可以查阅相关资料寻找证明）;
2. 证明：VCG 机制中参与人 i 的支付 p_i 至少为 0，至多为 $b_i(S^*)$（这表明 VCG 中每个人至少不会赚钱，并且支付不会大于自己的效用）;
3. 考虑有三个竞拍者两个物品 A 和 B 的多物品拍卖,第一个竞拍者对同时获得两个物品有估值 1(即 $v_1(AB) = 1$), 其余情况均为 0; 第二个竞拍者只对赢得物品 A 有估值 1 (即 $v_2(A) = v_2(AB) = 1$), 其余情况均为 0；第三个竞拍者只对赢得物品 B 有估值 1（即 $v_3(B) = v_3(AB) = 1$），其余情况均为 0.
   (a) 分别计算只有前两个竞拍者时和三个竞拍者全在时的 VCG 机制的结果;
   (b) 你能从中总结出什么? 增加一个竞拍者会减少单物品二价拍卖的收益吗?(这一问体现了 VCG 的一个缺陷，除此之外本题的计算也一定让你意识到了 VCG 机制的计算困难性，因此 VCG 机制在现实中并不常用）

3.4 交换遗憾与相关均衡

注：本题为选做题，不做不扣分，做对可用于补充各次作业其他题目的分数.

本题希望你从存在无交换遗憾算法这一事实出发，证明如下定理:

Theorem 3.1 假设每个参与人 i 使用无交换遗憾算法得到决策序列 $\{\sigma_i^t\}_{t=1}^T$，则下面的推荐策略 π^T 收敛于相关均衡：$\pi^T(s) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\prod_{i=1}^{n}\sigma_i^t(s_i), \forall s \in S$。

你可以参考这个 PPT 中 18 - 24 页的证明，但请不要直接翻译，而是用自己的语言重新组织一遍.