21188142: 课程综合实践 II（数据要素市场） **2024-2025 学年短学期**

HW 4: 动态博弈与合作博弈论基础

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2024 年 7 月 11 日

4.1 产量领导模型的计算

设市场上有 1 和 2 两个厂商，厂商 1 是大厂商，是产量制定的领导者；厂商 2 是小厂商，是产量制定的跟随者. 用 y_1, y_2 表示两个厂商的产量，因此总产量为 $y_1 + y_2$. 设总产量为 $y_1 + y_2$ 时的市场价格为 $2 - y_1 - y_2$，并且厂商 1 和 2 的生产一件产品的单位生产成本分别为 c_1, c_2，求在该假设下二者的子博弈完美均衡产量.

先写出厂商 1 和 2 的利润函数：$\pi_1 = (2 - y_1 - y_2)y_1 - c_1 y_1, \pi_2 = (2 - y_1 - y_2)y_2 - c_2 y_2$，然后先对厂商 2 求利润最大化（$y_1$ 假设为定植），解得 $y_2 = \dfrac{2 - y_1 - c_2}{2}$，然后将 y_2 代入厂商 1 的利润函数，求解得到最优的 $y_1^* = \dfrac{2 + c_2 - 2c_1}{2}$，最后将 y_1 代入 y_2 的表达式，求解得到最优的 $y_2^* = \dfrac{2 + 2c_1 - 3c_2}{4}$.

4.2 贝叶斯纳什均衡

注：本次作业 4.2 和 4.3 只需要选择其中一题完成即可，如果两题都完成，多的分数可以用于补充其余作业题的分数.

考虑如下的不完全信息博弈：

- $I = \{1, 2\}$：1 和 2 分别是行、列参与人
- $T_1 = \{A, B\}, T_2 = \{C\}$：参与人 1 有两个类型，参与人 2 有一个类型
- $p(A, C) = p(B, C) = \dfrac{1}{2}$：参与人 1 的两个类型具有相同的概率
- 因此有两种状态博弈，下图所示矩阵给出了两种状态博弈的收益矩阵（左图为 $t = (A, C)$ 时的状态博弈，右图为 $t = (B, C)$ 时的状态博弈）：

	L	R
T_1	1, 0	0, 2
B_1	0, 3	1, 0

	L	R
T_2	0, 2	1, 1
B_2	1, 0	0, 2

求解该博弈的贝叶斯纳什均衡（提示：求解出的贝叶斯纳什均衡集合的基数可能是连续统的，你只需要表达出这一集合需要满足的约束即可）.

设参与人 1 在类型 A 下的混合策略为 $[x(T_1),(1-x)(B_1)]$，在类型 B 下的混合策略为 $[y(T_2),(1-y)(B_2)]$，参与人 2 的混合策略为 $[p(L),(1-p)(R)]$。
我们首先考察参与人 2 的策略是否可能是纯策略（即 $p=0$ 或 $p=1$）：

1. 若 $p=0$，则类型 A 的参与人 1 最优选择是 B_1，类型 B 的参与人 1 最优选择是 T_2，因此这种情况下参与人 2 的最优选择是 $p=1$，因此不是均衡；
2. 若 $p=1$，则类型 A 的参与人 1 最优选择是 T_1，类型 B 的参与人 1 最优选择是 B_2，因此这种情况下参与人 2 的最优选择是 $p=0$，因此不是均衡.

因此我们知道参与人 2 均衡时不可能选择纯策略，因此一定会选择混合策略。根据混合策略的无差异原则有

$$\frac{1}{2}(3(1-x)+2y)=\frac{1}{2}(2x+(y+2(1-y)))$$

解得 $x=\dfrac{1+3y}{5}$，即 x 与 y 必须满足这一条件才可能是均衡。接下来我们需要研究是否只要满足这一条件就可以是均衡，我们可以写出参与人 1 在类型为 A,B 时分别的效用函数：

$$u_{1A}=xp+(1-x)(1-p)=2xp-x-p+1$$
$$u_{1B}=y(1-p)+(1-y)p=-2yp+y+p$$

求导即可知，最优反应为 $x^*=\begin{cases}0, & \text{如果 } p<\frac{1}{2}\\ [0,1], & \text{如果 } p=\frac{1}{2}\\ 1, & \text{如果 } p>\frac{1}{2}\end{cases}$，$y^*=\begin{cases}1, & \text{如果 } p<\frac{1}{2}\\ [0,1], & \text{如果 } p=\frac{1}{2}\\ 0, & \text{如果 } p>\frac{1}{2}\end{cases}$，因此显然只有 $p=\dfrac{1}{2}$ 时才能满足 $x=\dfrac{1+3y}{5}$. 因此，只需要 $p=\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{1+3y}{5}$，$y\in[0,1]$ 即可是均衡.

4.3 纸牌游戏

注：本次作业 4.2 和 4.3 只需要选择其中一题完成即可，如果两题都完成，多余的分数可以用于补充其余作业题的分数.

考虑一个非常简单的纸牌游戏：有两个参与人 1 和 2，两张纸牌 A 和 K，A 和 K 都可能成为游戏的底牌，且两者成为底牌的概率相等. 首先自然决定了游戏的底牌，接下来博弈按如下顺序进行：

1. 参与人 1 看到了底牌，参与人 2 没有看底牌；
2. 参与人 1 看到底牌后如果选择放弃，此时收益为 $(-1,1)$，即参与人 1 付出 1 的代价，参与人 2 获得 1 的收益；
3. 参与人 1 看到底牌后如果选择加注

(a) 此时参与人 2 可以选择放弃，此时收益为 $(1,-1)$，即参与人 1 获得 1 的收益，参与人 2 付出 1 的代价；

(b) 参与人 2 可以选择跟注，此时如果底牌是 A，收益为 $(2,-2)$，否则如果底牌是 K，收益为 $(-2,2)$.

求解参与人 1 的最优策略以及此时 2 的最优应对（类比上课讲到的推荐信问题，这里参与人 1 也是要设计信号机制使得自己效用最大化，1 不能什么时候都加注，这样对手就知道 1 在无理取闹；1 也不能只在看到 A 的时候加注，这样太诚实对手在你加注时都会选择放弃，因此要设计一个折中的方案）.

所谓最优策略与最优应对，实际上还是纳什均衡. 设参与人 1 在看到底牌 A 时加注的概率为 p，在看到底牌 K 时加注的概率为 q，参与人 2 选择跟注的概率为 r. 一个显然的结果是，参与人 1 在看到底牌 A 时加注的概率为 1 才是最好，因为是占优策略，所以 $p=1$.
因为这个博弈是序贯的，所以类似于前面的斯塔克尔伯格博弈，我们先计算参与人 2 的最优应对，事实上可以使用贝叶斯公式得到 1 选择加注时拿到的是 A 的概率为

$$p(A \mid 1\ \text{加注}) = \frac{p(A)p(1\ \text{加注} \mid A)}{p(A)p(1\ \text{加注} \mid A) + p(K)p(1\ \text{加注} \mid K)} = \frac{1}{1+q}$$

此时我们要求 2 的两个选择无差异（显然是要混合策略的），故

$$-1 = \frac{1}{1+q} \cdot (-2) + \frac{q}{1+q} \cdot 2$$

解得 $q = \frac{1}{3}$. 当然，参与人 1 在拿到 K 时的两个选择也要无差异，因此有

$$-1 = 1 - r - 2r$$

解得 $r = \frac{2}{3}$. 事实上可以验证 $p = 1, q = \frac{1}{3}, r = \frac{2}{3}$ 是贝叶斯纳什均衡，并且也是最优解.

4.4 Shapley 值的性质

证明：Shapley 值是满足对称性的解概念.

利用 Shapley 值的等价定义 $\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$，我们知道对于对称的 j 和 k，在计算 $S \subseteq N\setminus\{j,k\}$ 时上式的结果是一样的，因此区别就在于对 j 计算 S 有 k 没 j 的情况，对 k 计算 S 有 j 没 k 的情况. 事实上，对于任意的 $S \subseteq N\setminus\{j,k\}$，由于对称性，$v(S\cup\{j\}) = v(S\cup\{k\})$，因此 $v(S\cup\{j,k\}) - v(S\cup\{j\}) = v(S\cup\{j,k\}) - v(S\cup\{k\})$. 因此在对 j 计算 S 有 k 没 j 的情况，对 k 计算 S 有 j 没 k 的情况时，根据上面的分析，也是完全一致的，因此 Shapley 值是满足对称性的.

4.5 Shapley-Shubik 权力指数

联合国安理会是国际政治体系中最重要的机构，它是在二战之后成立的. 当时，安理会是由五个常任理事国和六个非常任理事国组成的. 安理会最初的宪章规定，一项决议被采纳，必须获得至少七个成员国的赞成票. 此外，每个常任理事国对每一项决议都有否决权. 忽略安理会成员弃权的可能性，这意味着，一项决议要能够在安理会获得通过，它必须获得所有五个常任理事国和至少两个非常任理事国的支持.

安理会常任理事国手中的否决权一直是观察家批评的焦点，观察家反对的是常任理事国和非常任理事国之同的"权力不平衡". 批评的声浪使得安理会在 1965 年进行了重组，然后确立了一直维持到今天的安理会结构. 新的安理会结构增加了四个非常任理事国，一项决议要获得通过，必须获得九个成员国的支持，其中跟以前一样，必须包括五个常任理事国，即此后决策的通过，除了获得五个常任理事国的支持外，还必须获得至少四个非常任理事国的支持，跟以前的必须获得至少两个非常任理事国的支持相比，显著改变了安理会的权力结构. 但是这个看法站得住脚吗?

Shapley-Shubik 权力指数可以使我们用定量的方法米探究这个问题. 为此，我们计算两个结构下（1965 年之前和之后），安理会成员国的沙普利值，然后验证 1965 年重组之后的安理会，其成员国的沙普利值发生了哪些改变. 1965 年之前的安理会结构可以描达为一个合作博弈. 如果我们用 P 表示安理会常任理事国的集合，用 NP 表示非常任理事国的集合，那么这个博弈的参与人集由 $N = P \cup NP$ 给出，特征函数（忽略弃权的可能性）给出如下:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |P \subset S| \text{ 且 } |S| \geqslant 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同理，1965 年重组之后的安理会的特征函数表达如下:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |P \subset S| \text{ 且 } |S| \geqslant 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

回答以下问题:

1. 计算 1965 年之前每个常任理事国和非常任理事国的 Shapley 值，并计算常任理事国的 Shapley 值之和与非常任理事国的 Shapley 值之和的比值;

   设 i 为常任理事国，那么使得 $v(S) = 0$ 且 $v(S \cup \{i\}) = 1$ 的所有 S 构成了 Shapley 的计算的关键。不难发现这样的 S 必须包括其他四个常任理事国，然后包括 2 或 3 或 4 或 5 或 6 个非常任理事国，由此可以根据 Shapley 值的等价定义得到 i 的 Shapley 值为

   $$\frac{6!4!}{11!}C_6^2 + \frac{7!3!}{11!}C_6^3 + \frac{8!2!}{11!}C_6^4 + \frac{9!1!}{11!}C_6^5 + \frac{10!0!}{11!}C_6^6 = \frac{76}{385}$$

   事实上所有的常任理事国地位对称，因此其他常任理事国的 Shapley 值也是 $\frac{76}{385}$，非常任理事国的 Shapley 值直接根据有效率得到为

   $$\frac{1}{6}(1 - 5 \times \frac{76}{385}) = \frac{1}{462}$$

比值为 $\dfrac{5\times\dfrac{76}{385}}{6\times\dfrac{1}{462}}=\dfrac{77}{77}=76.$

2. 计算 1965 年之后每个常任理事国和非常任理事国的 Shapley 值，并计算常任理事国的 Shapley 值之和与非常任理事国的 Shapley 值之和的比值；

   同第一题理可以计算得到常任理事国的 Shapley 值为 $\dfrac{421}{2145}$，非常任理事国的 Shapley 值为 $\dfrac{4}{2145}$，比值为 $\dfrac{5\times\dfrac{421}{2145}}{4\times\dfrac{4}{2145}}=52.625.$

3. 根据前面的计算结果，评价 1965 年重组之后的安理会是否改变了安理会的权力结构.

   从比例来看的确使得非常任理事国的总权力增加了，但事实上微乎其微，并且因为非常任理事国的个数增加了，平摊到每个国家头上反而降低了，因此我们很难从 Shapley-Shubik 权力指数中看出什么（如果用 Banzhaf 值会更好一些）.