## 2025–2026 学年短学期

## 课程综合实践 II：数据要素交易基础

# Lec 03: 非合作博弈论基础（一）

吴一航 yhwu_is@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

# CONTENT

# 目录

# 课程大纲

- 数据交易平台构建技术
  - 数据获取技术：发现（discovery）、集成（integration）与提取（acquisition）
  - 数据合规与安全
- 数据交易与定价
  - 基础知识：博弈论，多臂老虎机算法，贝叶斯劝说
  - 基本策略：版本化
  - 非合作博弈论 → 拍卖定价
  - 合作博弈论 → 数据估值
  - 贝叶斯劝说 → 决策视角数据定价
  - 隐私视角、外部性视角……

如何合理地为数据定价？首先从普通商品的价格决定开始。

# 偏好

你现在要组织一场活动，需要为活动购置一些钥匙扣和本子作为奖品，但你不确定买多少个钥匙扣和本子，这时你的心里会出现这样的声音：

- 比起 20 个钥匙扣和 5 个本子，我更喜欢 15 个钥匙扣和 10 个本子；
- 比起 15 个钥匙扣和 10 个本子，我更喜欢 10 个钥匙扣和 15 个本子；
- ……

在微观经济学中，我们假定消费者在面临选择时，通常首先会对可选方案进行排序，然后从中选择最喜欢的方案。这种排序就体现了消费者的**偏好（preference）**。

# 偏好

你现在要组织一场活动，需要为活动购置一些钥匙扣和本子作为奖品，但你不确定买多少个钥匙扣和本子，这时你的心里会出现这样的声音：

- 比起 20 个钥匙扣和 5 个本子，我更喜欢 15 个钥匙扣和 10 个本子；
- 比起 15 个钥匙扣和 10 个本子，我更喜欢 10 个钥匙扣和 15 个本子；
- ……

在微观经济学中，我们假定消费者在面临选择时，通常首先会对可选方案进行排序，然后从中选择最喜欢的方案。这种排序就体现了消费者的**偏好（preference）**。

事实上，有了偏好之后，就可以衡量物品的价格了：

- 只需要询问一个诚实的人，例如“你觉得 1 斤苹果和多少钱带给你的偏好是无差异的”，如此就可以得到一个消费者可以接受的价格；
- 通过这样的方式，可以为每个消费者的每种消费组合的偏好赋予一个常数，这一常数可以表示消费者对一个消费组合的偏好程度；
  - 例如为 20 个钥匙扣和 5 个本子的组合赋予常数 10，为 15 个钥匙扣和 10 个本子的组合赋予常数 15……

# 效用

**这些常数就称为这些消费组合对消费者产生的效用（utility）**。

形式化而言，记 $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ 表示消费者的消费组合（又称消费束），其中 $x_i$ 表示购买 $x_i$ 单位物品 $i$。

效用函数就是将消费束映射到满意程度的函数：

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个消费束，则 $u(\boldsymbol{x})$ 是一个实数，表示消费者对 $\boldsymbol{x}$ 满意程度；
- 如 $u(1\ \textbf{斤苹果}, -6\ \textbf{元钱}) = 0$ 表示 1 斤苹果和 6 元钱对消费者无差异；
- 要求消费者越满意的消费束对应的效用值越高；

# 效用

**这些常数就称为这些消费组合对消费者产生的效用（utility）**。

形式化而言，记 $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ 表示消费者的消费组合（又称消费束），其中 $x_i$ 表示购买 $x_i$ 单位物品 $i$。

效用函数就是将消费束映射到满意程度的函数：

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个消费束，则 $u(\boldsymbol{x})$ 是一个实数，表示消费者对 $\boldsymbol{x}$ 满意程度；
- 如 $u(1\ \textbf{斤苹果}, -6\ \textbf{元钱}) = 0$ 表示 1 斤苹果和 6 元钱对消费者无差异；
- 要求消费者越满意的消费束对应的效用值越高；
- **理性人假设：经济中每个参与人都会选择让自身效用最大化的行动**；
  - 当然理性还有其它含义，例如使用贝叶斯公式更新信念；
  - 理性人假设是经济学的理论研究基础，虽然饱受争议（那为什么仍然要考虑理性人的情况呢）；
  - 不理性人的经济学：行为经济学。

# 贝叶斯公式

假设一个常规的检测结果的敏感度与可靠度均为 99%，即吸毒者每次检测呈阳性的概率为 99%，而不吸毒者每次检测呈阴性的概率为 99%。假设某公司对全体雇员进行吸毒检测，已知 0.5% 的雇员吸毒，请问每位检测结果呈阳性的雇员吸毒的概率为下面哪个选项

A. 小于 50%

B. 大于 50%

# 几类效用函数

- **柯布-道格拉斯效用函数**：$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$，其中 $\alpha \in (0, 1)$；
  - 其中 $\alpha \in (0, 1)$ 表明商品是多多益善的，但具有边际效用递减的特点（下一页中展开介绍）；
  - 现实中常用的效用函数，也可以表达经济投入-产出关系等；

# 几类效用函数

- **柯布-道格拉斯效用函数**：$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$，其中 $\alpha \in (0,1)$；
  - 其中 $\alpha \in (0,1)$ 表明商品是多多益善的，但具有边际效用递减的特点（下一页中展开介绍）；
  - 现实中常用的效用函数，也可以表达经济投入-产出关系等；
- **冯诺伊曼-摩根斯坦效用**：$u(L) = pu(\boldsymbol{x}) + (1-p)u(\boldsymbol{y})$；
  - 如果有一个彩票 $L$，购买后有 $p$ 的概率获得 $\boldsymbol{x}$，有 $1-p$ 的概率获得 $\boldsymbol{y}$，那么购买彩票的效用等于购买 $\boldsymbol{x}$ 和购买 $\boldsymbol{y}$ 的效用的加权平均；
  - $u$ 是严格凹函数 $\rightarrow$ 风险厌恶，$u$ 是严格凸函数 $\rightarrow$ 风险偏好，$u$ 是线性函数 $\rightarrow$ 风险中性；

# 几类效用函数

- **柯布-道格拉斯效用函数**： $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$，其中 $\alpha \in (0,1)$；
  - 其中 $\alpha \in (0,1)$ 表明商品是多多益善的，但具有边际效用递减的特点（下一页中展开介绍）；
  - 现实中常用的效用函数，也可以表达经济投入-产出关系等；
- **冯诺伊曼-摩根斯坦效用**：$u(L) = pu(\boldsymbol{x}) + (1-p)u(\boldsymbol{y})$；
  - 如果有一个彩票 $L$，购买后有 $p$ 的概率获得 $\boldsymbol{x}$，有 $1-p$ 的概率获得 $\boldsymbol{y}$，那么购买彩票的效用等于购买 $\boldsymbol{x}$ 和购买 $\boldsymbol{y}$ 的效用的加权平均；
  - $u$ 是严格凹函数 $\to$ 风险厌恶，$u$ 是严格凸函数 $\to$ 风险偏好，$u$ 是线性函数 $\to$ 风险中性；
- **拟线性效用函数**：$u(\boldsymbol{x}, p) = v(\boldsymbol{x}) - p$
  - 假定每一元钱的效用是单位 1，则上式表示通过价格 $p$ 购买了消费束 $\boldsymbol{x}$ 后的效用；
  - 此前的效用函数都是在描述 $v$ 的形式，这里考虑了价格；
  - 日后最常见的效用函数。

# 边际效用递减规律

炎炎夏日，如果你想买一些冰激凌解暑，你可能会思考吃几个冰激凌对你而言最满足，于是你计算了一下大致的效用值如下表：

| 数量 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 效用 | 7 | 12 | 16 | 18 | 15 | 10 |

**定义**

边际效用是指消费者对某种物品的消费量每增加一单位所增加的额外满足程度。

| 数量 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 边际效用 | 7 | 5 | 4 | 2 | −3 | −5 |

在一定时间内，随着消费某种商品数量的不断增加，消费者从中得到的总效用是在增加的，但是以递减的速度增加的，即边际效用是递减的；当商品消费量达到一定程度后，总效用达到最大值，如果继续增加消费，总效用不但不会增加，反而会逐渐减少，此时边际效用变为负数。

# 效用最大化问题

预备工作结束后，可以计算一个效用最大化问题，由此研究消费者决策问题的特点。为简化讨论，考虑只有两个商品的情形：设消费者的效用函数为 $u(x_1, x_2)$，两种商品的价格分别为 $p_1$ 和 $p_2$，消费者的收入为 $p$。

这里强调了消费者的收入，这是因为在消费时消费者都有**预算约束（budget constraint）**，因此效用最大化的目标可以写为

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant p. \end{aligned}$$

要求 $u$ 关于 $x_1, x_2$ 是递增的，则 $u$ 取最大值时预算约束必然取等号。

# 效用最大化问题

**例**

设消费者需求函数为 $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$，两种商品价格分别为 $p_1$ 和 $p_2$，消费者的收入为 $p$，求消费者的需求函数。

# 效用最大化问题



**例**

设消费者需求函数为 $u(x_1,x_2)=x_1^\alpha x_2^\beta$，两种商品价格分别为 $p_1$ 和 $p_2$，消费者的收入为 $p$，求消费者的需求函数。

写出效用最大化问题:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & x_1^\alpha x_2^\beta \\ \text{s.t.} \quad & p_1x_1+p_2x_2=p. \end{aligned}$$

- 两种解法：利用预算约束化为一元函数极值问题求解，或使用拉格朗日乘数法;
- 不难解得

$$x_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{p}{p_1}, x_2=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{p}{p_2};$$

- 注意这里的效用函数没有考虑钱的效用，而是将钱视为约束;
- 不难发现需求与价格之间成反相关关系。

# 市场出清



将上述基本思想推广，可以得到一般情况下的消费者需求函数。

**需求定律**

在其他条件不变的情况下，商品的需求量与价格之间成反方向变动的关系，即价格上涨，需求量减少；价格下降，需求量增加。

当然也存在一些例外，例如吉芬商品，但这里不做讨论。

# 市场出清

将上述基本思想推广，可以得到一般情况下的消费者需求函数。

**需求定律**

在其他条件不变的情况下，商品的需求量与价格之间成反方向变动的关系，即价格上涨，需求量减少；价格下降，需求量增加。

当然也存在一些例外，例如吉芬商品，但这里不做讨论。

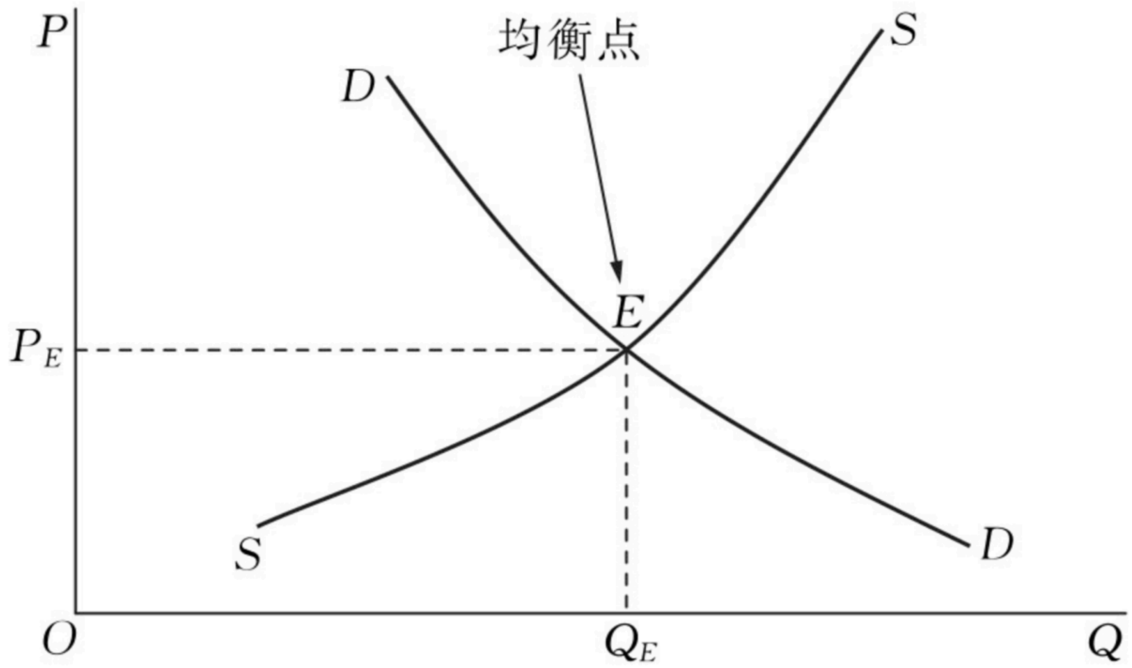
厂商生产决策与消费者决策是类似的，只是考虑利润最大化/成本最小化问题，可以得到如下供给定律：

**供给定律**

对于正常商品来说，在其他条件不变的情况下，商品价格与需求量之间存在着正方向的变动关系，即一种商品的价格上升时，这种商品的供给量就会增加，相反，价格下降时供给量减少，这就是供给定律。

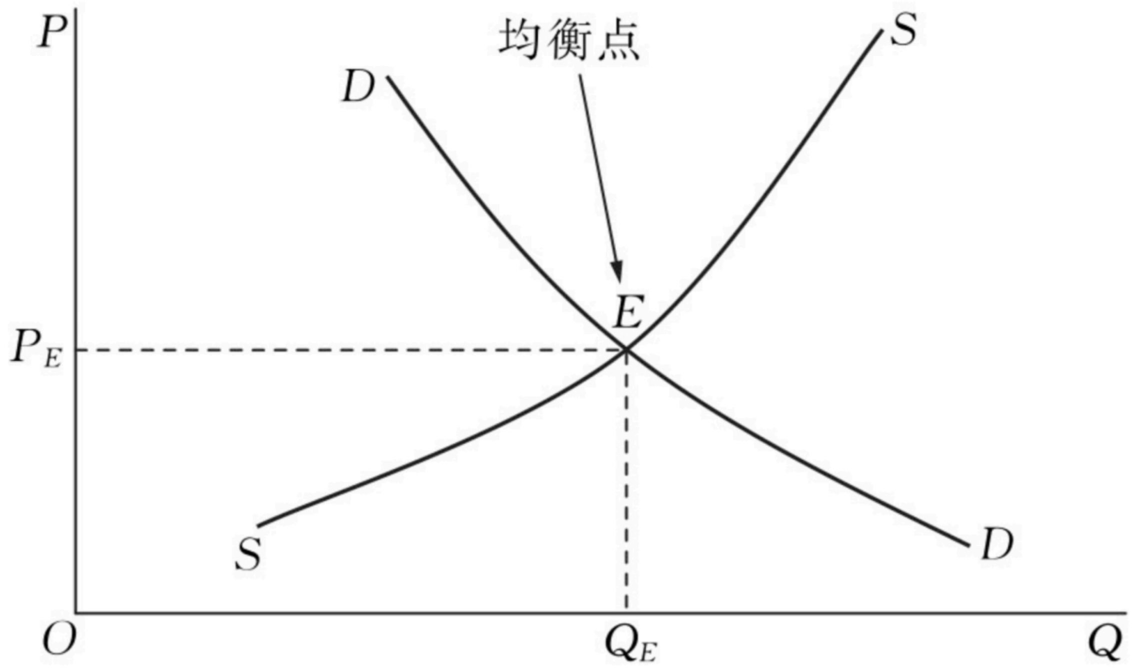
# 市场出清






**市场出清（market clearing）**：市场机制能够自动地消除超额供给或超额需求，市场在短期内自发地趋于供给等于需求的均衡状态。

# 市场出清




**市场出清（market clearing）**：市场机制能够自动地消除超额供给或超额需求，市场在短期内自发地趋于供给等于需求的均衡状态。

上述均衡称为“竞争均衡”，因为其中重要的假设是厂商和消费者数量非常多，以至于他们**每个人各自的行动完全无法改变整个市场的价格**。

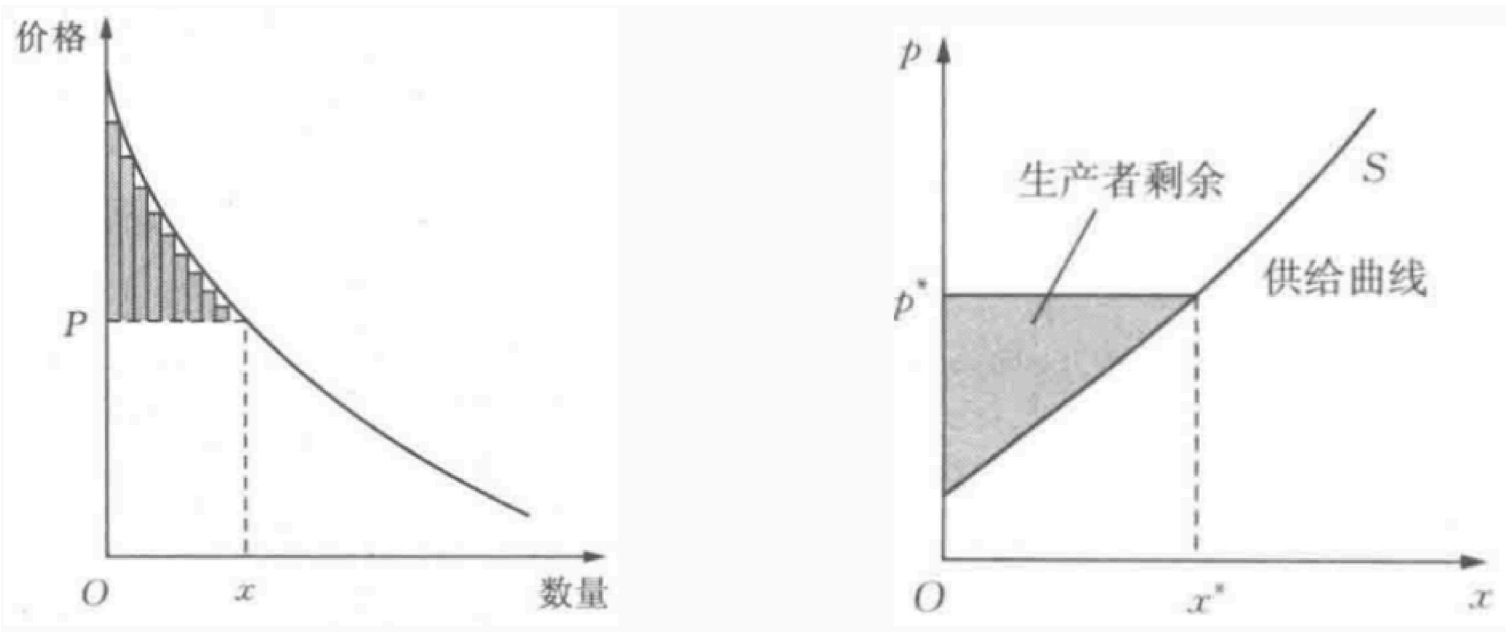
- 例如此前效用最大化问题中假设消费者是**价格接受者**。

# 社会福利



有了竞争均衡的概念后，我们希望知道这样一个市场能自发达到的均衡有多“好”——这是经济学的重要目标之一，因为经济学是研究资源配置的学科，自然我们希望目前这一市场模型能够达到有效资源配置。

资源配置有效性的主要衡量标准依赖于**福利（welfare）**，因此下面讨论消费者、厂商福利以及市场总福利，或者说社会福利的衡量方法。



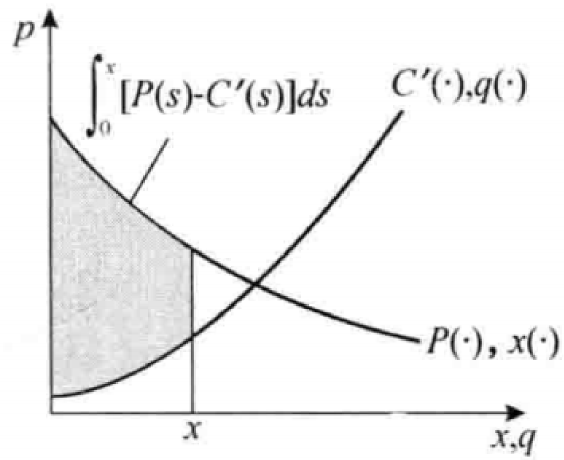

(a) 消费者剩余　　(b) 厂商剩余

**消费者剩余 = 买到的商品效用 - 支付，厂商剩余 = 出售的收益 - 成本**

# 社会福利

社会福利等于消费者剩余（消费者福利）加上厂商剩余（厂商福利）:

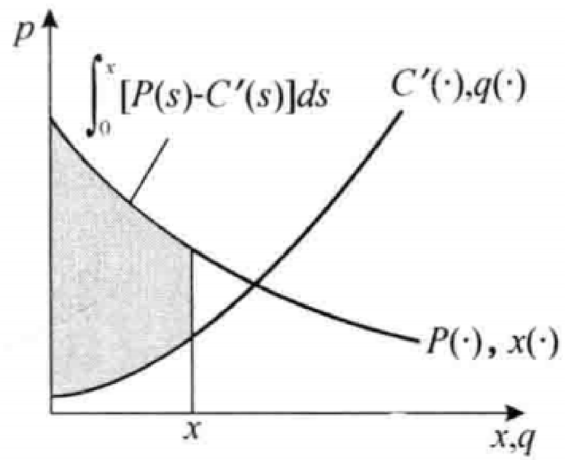
- **消费者剩余和厂商剩余之间的支付被抵消，因此只剩下消费者买到商品的效用 - 厂商成本**



# 社会福利

社会福利等于消费者剩余（消费者福利）加上厂商剩余（厂商福利）:

- **消费者剩余和厂商剩余之间的支付被抵消，因此只剩下消费者买到商品的效用 - 厂商成本**




显然在供给曲线和需求曲线相交的位置实现社会福利最大化，这就是福利经济学第一定理的直观结果:

**福利经济学第一定理**

在竞争市场中，当市场供求达到均衡时，市场资源配置是社会福利最大化的。

# 看不见的手

仔细思考福利经济学第一定理，会发现这一结果的内涵是非常有趣的：竞争均衡建立在市场上每个消费者都追求自身效用最大化，并且每个厂商都追求利润最大化的基础上，是**所有人自私的行为结合在一起得到的均衡，最终却实现了有效率的分配**。事实上，这一结果就是亚当·斯密在《国富论》中所描述的**看不见的手（invisible hand）**的一个具体体现：

> 每个人都试图用应用他的资本，来使其生产品得到最大的价值。一般来说，他并不企图增进公共福利，也不清楚增进的公共福利有多少，他所追求的仅仅是他个人的安乐，个人的利益，但当他这样做的时候，就会有一双看不见的手引导他去达到另一个目标，而这个目标绝不是他所追求的东西。由于追逐他个人的利益，他经常促进了社会利益，其效果比他真正想促进社会效益时所得到的效果为大。
>
> — 亚当 · 斯密，《国富论》

# 市场失灵：垄断

然而现实并非福利经济学第一定理所说的那般美好，因为**福利经济学第一定理成立的假设非常多**：完全竞争、完全信息、无交易成本、无外部性、无规模经济等，而这些假设在现实中很难实现。在这些条件不满足的时候，就出现了**市场失灵（market failure）**。

# 市场失灵：垄断

然而现实并非福利经济学第一定理所说的那般美好，因为**福利经济学第一定理成立的假设非常多**：完全竞争、完全信息、无交易成本、无外部性、无规模经济等，而这些假设在现实中很难实现。在这些条件不满足的时候，就出现了**市场失灵（market failure）**。

**垄断（monopoly）：一个产品只有一家厂商生产**，故该厂商具有市场势力，自身可以决定产品价格，从而会破坏完全竞争市场的福利最优性；


**垄断厂商会通过提高价格攫取更多的消费者剩余。**

# 市场失灵：外部性

**外部性（externalities）**：外部性指一个人或一群人的行动和决策使另一个人或一群人受损或受益的情况，即社会成员从事经济活动时其成本与后果不完全由该行为人承担；

- 例如河流上游工业园区，下游渔场，工业园区排污会影响渔场的生产活动（**负外部性**）；
- 例如植树造林不仅美化了环境，还为周围居民提供了清新的空气和休闲场所（**正外部性**）；
- 植树造林的本质是提供**公共物品（public goods）**，即能够被所有人得到的物品或服务，**任何人都不能因为自己的消费而排除他人对该物品的消费（非排他性）**，类似的例子还有电信、电力、自来水等。公共物品的提供通常会带来正外部性。
  - 但也存在问题：公地悲剧；
  - 产权问题/政府监管。

# 市场失灵：信息不对称

目前为止几乎所有的讨论都忽视了信息问题：

- 在完全竞争市场中，暗含着假定厂商的成本函数在不同厂商之间是已知的，厂商对消费者的需求曲线也是已知的，消费者对厂商生产的产品带给自己的效用在购买前也是已知的；

# 市场失灵：信息不对称

目前为止几乎所有的讨论都忽视了信息问题：

- 在完全竞争市场中，暗含着假定厂商的成本函数在不同厂商之间是已知的，厂商对消费者的需求曲线也是已知的，消费者对厂商生产的产品带给自己的效用在购买前也是已知的；
- 然而在现实世界中，这些信息通常是不完全的，厂商的成本函数在一些情况下甚至是商业机密，因此不同厂商拥有的成本信息是不同的；对一些新的产品，厂商并不能准确判断市场对其的需求；消费者很多时候也要通过"货比三家"的方式来选择最适合自己的产品；
- 这些问题都是信息不对称（asymmetric information）的例子，接下来我们将看到，信息不对称会给资源的有效配置带来很多挑战。

# 市场失灵：信息不对称

乔治 · 阿克洛夫（George Akerlof）提出“**柠檬市场（The Market for Lemons）**”的概念。“柠檬”在美国俚语中表示“次品”或“不中用的东西”，所以柠檬市场也称次品市场。

- 考虑二手车市场，假设市场上有 100 个人在出售二手汽车，还有一系列消费者想要购买二手汽车。已知这些汽车中有 50 辆是好货，还有 50 辆是次货；
- 每辆车的卖家知道它的质量，但买家不清楚且很难直接区分具体某辆车是好货还是次货（信息不对称）；
- 次货卖家希望能卖 2000 美元，买家最高支付意愿为 2400 美元；
- 好货卖家希望能卖 3000 美元，买家最高支付意愿为 3600 美元。

# 市场失灵：信息不对称

- 信息对称时，买家能区分出好货和次货从而选择自己需要的产品；
- 但现在买家无法区分，只知道一半的车是好货，一半的车是次货；
  - 因此买家对一辆车支付意愿不会超过 $\frac{1}{2} * 2400 + \frac{1}{2} * 3600 = 3000$ 元；
  - 然而此时好车卖家不愿出售，只能退出市场，留下次货占领整个市场，也就是所谓的"劣币驱逐良币"；
  - 显然这样的市场降低了买卖双方福利，存在市场失灵问题。
- 问题：这一市场失灵问题可以如何解决？

类似的例子还有

- 保险中的逆向选择和道德风险问题
- 斯宾塞（Michael Spence）劳动力市场模型
- 阿克洛夫、斯宾塞和斯蒂格利茨（Joseph Stiglitz，贡献在于信息甄别）共同获得 2001 年诺贝尔经济学奖

# 数据的特性

- 卖家垄断：例如 X，Meta，Google 等平台拥有大量自己独特的用户数据，因此具有垄断势力；
- 零成本复制性：
  - 最直接的一点是，供给曲线失效；
  - 外部性：例如你的竞争厂家购买了某份利于提高产量的重要数据，但你没有买，尽管你没有参与市场，但你的利润可能会受到影响；**零成本复制使得数据出售更容易，人们更容易受到外部性的影响**；
  - 公共物品：数据产权问题（类似于创新、专利）；尊重数据劳动成本。

# 数据的特性



结合垄断和零成本复制性，数据定价可以类比其它信息产品（由比特构成的产品，通常具有零成本复制性），如软件、操作系统、话费等，结合垄断定价可以实施**价格歧视（price discrimination）**：

- 一级（完全）价格歧视：厂商完全掌握消费者偏好，**将每个消费者的价格定在其最大支付意愿上**，完全攫取消费者剩余；

# 数据的特性

结合垄断和零成本复制性，数据定价可以类比其它信息产品（由比特构成的产品，通常具有零成本复制性），如软件、操作系统、话费等，结合垄断定价可以实施**价格歧视（price discrimination）**：

- 一级（完全）价格歧视：厂商完全掌握消费者偏好，**将每个消费者的价格定在其最大支付意愿上**，完全攫取消费者剩余；
- 三级价格歧视：根据消费者一些特征，如年龄、性别、地域等，**对不同消费者群体收取不同价格**（大数据杀熟，学生半价）；

# 数据的特性



结合垄断和零成本复制性，数据定价可以类比其它信息产品（由比特构成的产品，通常具有零成本复制性），如软件、操作系统、话费等，结合垄断定价可以实施**价格歧视（price discrimination）**：

- 一级（完全）价格歧视：厂商完全掌握消费者偏好，**将每个消费者的价格定在其最大支付意愿上**，完全攫取消费者剩余；
- 三级价格歧视：根据消费者一些特征，如年龄、性别、地域等，**对不同消费者群体收取不同价格**（大数据杀熟，学生半价）；
- 二级价格歧视：先前的思路是收集消费者的信息做出个性化定价，而二级价格歧视是**按不同的价格出售不同数量的商品**，但购买相同数量产品的人都支付相同的价格；
  - 一种最简单的形式就是，大客户购买的数量比普通客户多，因此可以享受到更低的价格（例如话费）；
  - 更巧妙的策略是设计一系列产品的特定组合，使得不同消费者**根据自己的需求选择不同的组合（信息甄别）**，从而提升整体销量和利润，如机票的商务舱/经济舱，Windows 专业版/家庭版（**版本化**）等。

# 数据的特性

- 效用不确定性（信息不对称）：
  - **买家确定数据的效用，但卖家不确定买家认为的效用**：可能因为买家的下游任务保密，此时需要通过信息显示或甄别的方式解决；
  - **卖家知道数据的价值，但买家本身不确定数据效用**：买家没看到数据内容前不确定数据质量，可以通过免费试用、打广告（贝叶斯劝说）等方式解决；
  - **买家和卖家都不确定数据的效用**：结合以上二者，卖家不清楚买家下游任务，买家没看到数据内容前不确定数据质量。

以上问题的解决都将求助于新的研究范式，即基于博弈论的研究范式。

CONTENT

# 目录

# 从微观经济学到博弈论

- **微观经济学主要关注个人最大化自身效用的单人决策问题**，例如消费者最大化效用、厂商最大化利润问题等；
  - 完全竞争市场中，消费者无需考虑厂商行动，厂商无需考虑消费者乃至其他厂商行动，就能同时达到自身效用最大化和福利最大化；
- 然而**现实中很多场景下每个人的决策会互相影响**，从数学表达式来看，从单人决策到多人相关决策实际上就是从

$$\max_{x\in X} u(x)$$

变为了

$$\max_{x_i\in X_i} u(x_i, x_{-i})$$

其中 $X$ 和 $X_i$ 表示决策者的可选决策，$x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ 表示除 $i$ 之外的其他人的决策，这在博弈论中是常用的记号。
- 显然，多人决策下每个人的最优决策都与其他人的最优决策相互交织，因此引入了相当的复杂性，下面通过几个例子来简单体会这一点。

# 例子：垄断与寡头



假设你是一个书店老板，你的书店是某个小镇上唯一的书店，每本书的成本为 20 元。你知道每个顾客只要书的价格不超过 200 元就会买，那么你的决策是什么？

# 例子：垄断与寡头



假设你是一个书店老板，你的书店是某个小镇上唯一的书店，每本书的成本为 20 元。你知道每个顾客只要书的价格不超过 200 元就会买，那么你的决策是什么？


这一情况下只有一个厂商，也就是此前提到的垄断的情况。

# 例子：垄断与寡头

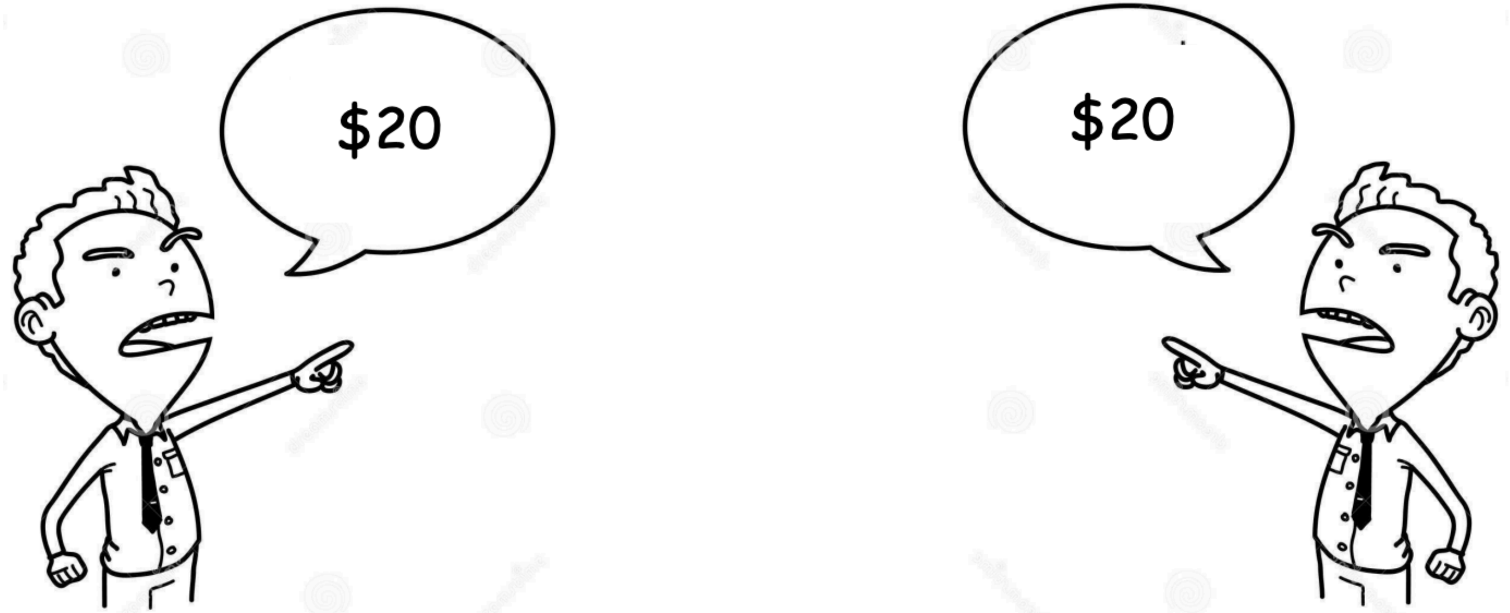


但如果现在小镇上突然开起了另一个书店，并且每本书的成本也为 20 元，那么你们的决策是什么?

# 例子：垄断与寡头



但如果现在小镇上突然开起了另一个书店，并且每本书的成本也为 20 元，那么你们的决策是什么？




- 此时有两个厂商，属于寡头垄断（oligopoly），少数几个厂商的情况都属于寡头垄断；
- 上述竞争是价格竞争，称为伯川德竞争（Bertrand competition），此时两个厂商的最优策略是定价等于成本；
- 后续还会介绍产量竞争场景，称为古诺竞争（Cournot competition）。

# 例子：垄断与寡头

- **总结**：垄断和寡头垄断下，厂商都具有市场势力，但垄断厂商做决策只需要考虑消费者需求，而寡头垄断厂商则需要考虑其他寡头策略；

# 例子：垄断与寡头

- **总结**：垄断和寡头垄断下，厂商都具有市场势力，但垄断厂商做决策只需要考虑消费者需求，而寡头垄断厂商则需要考虑其他寡头策略；
- 价格竞争导致利润降为 0，这样的结果双方都很难接受。因此你可以和对方达成协议，共同提高价格，这样双方都能获得正的利润；
  - 然而这样的行为可能会被视为垄断协议，两家书店构成了**卡特尔（cartel）**，这是一种违反反垄断法的行为；

# 例子：垄断与寡头



- **总结**：垄断和寡头垄断下，厂商都具有市场势力，但垄断厂商做决策只需要考虑消费者需求，而寡头垄断厂商则需要考虑其他寡头策略；
- 价格竞争导致利润降为 0，这样的结果双方都很难接受。因此你可以和对方达成协议，共同提高价格，这样双方都能获得正的利润；
  - 然而这样的行为可能会被视为垄断协议，两家书店构成了**卡特尔（cartel）**，这是一种违反反垄断法的行为；
- 但这并不是故事的结局。如果有一天你的好朋友开了一家印刷厂，他可以让你的成本降低到 15 元，结局会如何呢？
  - 显然，你可以将价格定在 19.99 美元，从而将对方挤出市场，而你的利润则会变为 4.99 美元；
  - 总而言之：多人决策的情况复杂性更高。

# 一个游戏

每个同学代表世界上的一个国家，每位同学代表的国家之间可以互通贸易。为了保护本国产业，或控制贸易逆差，每位同学可以设置一个关税。

- 如果你和其他同学都设置低关税，则你们的效用均为 10；
- 如果一方设置高关税，另一方设置低关税，则设置高关税的一方效用为 15，设置低关税的一方效用为 0；
- 如果你和其他同学都设置高关税，则你们的效用均为 5；

你会选择设置高关税还是低关税？

# 博弈的表达



**博弈问题的基本要素？**总而言之，是指多个人的交互决策

- 多个人进行决策
- 博弈的行为相互影响

# 博弈的表达

**博弈问题的基本要素？** 总而言之，是指多个人的交互决策

- 多个人进行决策
- 博弈的行为相互影响

**如何规范地表达囚徒困境？**

**定义**

博弈可被表达为一个三元组 $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$，其中

- **参与人（player）** 集合：$N$，参与人记为 $i \in N$，
- 每个参与者可以选择的**策略（strategy）** 集合：$S_i$，
- **报酬函数（payoff function）**：$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$。

例如，在囚徒困境中：

- $N = \{\text{罪犯 } 1, \text{罪犯 } 2\}$，
- $S_1 = S_2 = \{\text{承认}, \text{不承认}\}$，
- $u_1$ 和 $u_2$ 可以通过上面的表格给出，如 $u_1(\text{承认}, \text{承认}) = -5$。

# 博弈的表达

**定义**

博弈可被表达为一个三元组 $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$，其中

- **参与人（player）**集合：$N$，参与人记为 $i \in N$，
- 每个参与者可以选择的**策略（strategy）**集合：$S_i$，
- **报酬函数（payoff function）**：$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$。

- 上述博弈表达称为**策略式博弈（strategic game）**，更为复杂的博弈（扩展式、不完全信息）还会有其它描述的要素；
- 要求博弈的参与人是理性且智能的：
  - 理性人假设在微观经济学中已经介绍，即参与人会选择最大化自身效用的行动；
  - 智能人假设参与人有能力分析博弈的全局；
  - 例如在竞争市场中，只要求是理性人，因为只需要最大化自身效用，并不要求对市场的全局有深刻的认识；
- 参与人理性、智能是**共同知识**：我知道你知道我知道你知道……

# 什么是博弈论

总而言之，**博弈论（game theory）**可以被定义为对智能的理性决策者之间冲突与合作的数学模型研究：

- 博弈论为分析那些涉及两个或更多个参与者且其决策会影响相互间福利水平的情况提供了一般性的数学方法；
- 近代博弈论始于 Zermelo、Borel、Von Neumann、Morgenstern 等人的工作；
- 人类对于如何设计物理系统来控制自然物质已经懂得许多，但对于如何建立社会体制来调节面临冲突的人类行为却做得不够。

# 博弈的解

博弈论的核心：给定一个博弈，关于“将会发生什么，我们能说些什么”。这一问题有至少三种不同可能的解释：

- 经验的、描述性的解释：在给定的博弈中，参与人如何展开博弈；
- 规范的解释：在给定的博弈中，参与人“应该”如何展开博弈；
- 理论的解释：假定参与人的行为是“合理的”或“理性的”，那么我们能推测出什么。

第一种解释涉及对参与人实际行为的观察，偏向于心理学与行为经济学的领域；第二种解释适用于仲裁者、立法者等，他们需要根据商定的原则（如公正、效率等）决定博弈的结果；第三种解释则是通过理论方法预期一个博弈的合理结果。

**定义**

博弈的解或**解概念（solution concept）**是对于一个博弈的一种预期结果，通常是一个策略组合，即参与人的行动选择，或收益的分配结果。

# 博弈论无处不在

- 扑克、国际象棋、围棋等游戏
- 广告拍卖、频谱拍卖、价格竞争、讨价还价
- 政策制定、国家治理、选举
- 国家安全、国际关系

# 博弈论的分类

1. 非合作博弈：参与人之间没有合作，选择行动之后效用是各自的效用，与他人无关
   - 分类依据一：是否完全信息，即参与人之间是否互相知道对方的效用函数，是否知道博弈的全局信息；
   - 分类依据二：静态博弈或动态博弈，即参与人的行动是一次同时完成的，还是序贯进行的；
     - 在两个互相看不见的房子里进行石头剪刀布，不要求同时完成，但是行动的先后不会影响结果，因此是静态博弈；
   - 四大类博弈：完全信息静态博弈（如囚徒困境）、完全信息动态博弈（如价格领袖模型）、不完全信息静态博弈（如拍卖）、不完全信息动态博弈（如扑克牌）。
2. 合作博弈：考虑参与人之间合作后产生的联合效用
   - 重点关注如何分配联合效用，有很多的解概念（收益分配方式）；
   - 博弈规范解释的应用（公平分配）；
   - 目前广泛应用于数据估值（在 lec 05 中介绍）。

CONTENT

# 目录

# 囚徒困境的分析

继续囚徒困境的例子，一个犯罪团伙的两名成员 1 和 2 被捕，他们在两个独立的房间里接受审问，他们之间无法通信：

罪犯 2

| 罪犯 1 | | 不承认 | 承认 |
|---|---|---|---|
| | 不承认 | $-1, -1$ | $-15, 0$ |
| | 承认 | $0, -15$ | $-5, -5$ |

理性的参与者会观察到：

1. 罪犯 1 发现，无论对方选择承认或不承认，自己选择承认都会比不承认效用更高；
2. 罪犯 2 发现，无论对方选择承认或不承认，自己选择承认都会比不承认效用更高；
3. 这时我们说不承认是一个**严格劣策略（strictly dominated strategy）**，即无论对方选择什么，自己选择这个策略都是最差的。

# 严格占优

称不承认是一个**严格劣策略（strictly dominated strategy）**，即无论对方选择什么，自己选择这个策略都是最差的:

**定义**

给定参与人 $i$ 的策略 $s_i$，如果他有另一个策略 $t_i$，使得对于任意的 $s_{-i} \in S_{-i}$，都有

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}),$$

则称 $s_i$ 是参与人 $i$ 的一个**严格劣策略（strictly dominated strategy）**。此时称 $s_i$ 被 $t_i$ **严格占优（strictly dominated）**，或者说 $t_i$ **严格占优于（strictly dominates）** $s_i$。

- 博弈论中假定，理性人不会选择严格劣策略，这并不是一个很强的假设，是符合常识的;
- 在博弈论中，参与人是理性的是共同知识;
- 因此囚徒困境的解（**占优策略均衡**）是 (承认, 承认)。

# 囚徒困境的进一步讨论

**囚徒困境的结果看起来有些不合理?**

1. 为什么两个人不会选择更好的点?（理性人的假设）
2. 现实中两个人选择合作，原因可能是什么?

**囚徒困境本质：出于个人理性的决策无法达到社会最优**

在完全竞争市场中，每个理性人的自私行为最终会导致整个市场的效率最大化，然而囚徒困境的例子表明现实不可能总是如此美好，人们总要为自己的自私行为付出代价。

**囚徒困境的例子**：公地悲剧、内卷、关税战、小组作业拖 ddl⋯⋯（$N$ 人博弈，不止双人）

**解决囚徒困境**：强制力、机制设计、长期关系⋯⋯

# 重复剔除严格劣策略

博弈论研究的目标之一就是希望拿到一个博弈就能分析清楚其应有的结果，现在有了占优这一工具，我们可以针对部分问题达成目标。

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| | $T$ | 1, 0 | 1, 2 | 0, 1 |
| | $B$ | 0, 3 | 0, 1 | 2, 0 |

# 重复剔除严格劣策略

博弈论研究的目标之一就是希望拿到一个博弈就能分析清楚其应有的结果，现在有了占优这一工具，我们可以针对部分问题达成目标。

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| | $T$ | $1, 0$ | $1, 2$ | $0, 1$ |
| | $B$ | $0, 3$ | $0, 1$ | $2, 0$ |

利用囚徒困境的思想，不难验证，对于参与人 2，策略 $R$ 被策略 $M$ 严格占优，因此我们可以 剔除策略 $R$，得到新的博弈

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $1, 0$ | $1, 2$ |
| | $B$ | $0, 3$ | $0, 1$ |

# 重复剔除严格劣策略

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $1, 0$ | $1, 2$ |
| | $B$ | $0, 3$ | $0, 1$ |

# 重复剔除严格劣策略

参与人 2

参与人 1

| | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ |

进一步地，对于参与人 1，策略 $B$ 被策略 $T$ 严格占优，因此我们可以剔除策略 $B$，得到如下博弈：

参与人 2

参与人 1

| | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ |

# 重复剔除严格劣策略

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $1, 0$ | $1, 2$ |
| | $B$ | $0, 3$ | $0, 1$ |

进一步地，对于参与人 1，策略 $B$ 被策略 $T$ 严格占优，因此我们可以剔除策略 $B$，得到如下博弈：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $1, 0$ | $1, 2$ |

最后对于参与人 2，$L$ 被 $M$ 严格占优，因此最终的解（占优策略均衡）是 $(T, M)$。以上过程每一步都剔除一个被占优的策略，故整个过程被称为重复剔除劣策略。

# 弱占优

有的博弈没有严格劣策略，例如：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | 1, 2 | 2, 3 |
| | $B$ | 2, 2 | 2, 0 |

# 弱占优

有的博弈没有严格劣策略，例如：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | 1, 2 | 2, 3 |
| | $B$ | 2, 2 | 2, 0 |

尽管没有严格劣策略，但策略 $B$ 确实有特殊之处：

- 和策略 $T$ 相比，$B$ 虽然不能总是给出更好的结果，但至少不会更差；
- 并且在参与人 2 选择 $L$ 时，策略 $B$ 会给出更好的结果。

这种情况下，我们称策略 $B$ **弱占优于（weakly dominates）**策略 $T$。

# 弱占优

**定义**

给定参与人 $i$ 的策略 $s_i$，如果他有另一个策略 $t_i$，满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $s_{-i} \in S_{-i}$，都有 $u_i(t_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i, s_{-i})$；
2. 至少存在一个 $s_{-i} \in S_{-i}$，使得 $u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$；

则称 $s_i$ 是参与人 $i$ 的一个**弱劣策略（weakly dominated strategy）**。此时我们称 $s_i$ 被 $t_i$ **弱占优（weakly dominated）**，或者说 $t_i$ **弱占优于（weakly dominates）** $s_i$。

- 一般而言，除非强调严格占优，否则默认占优是指弱占优；
- 理性参与人不会使用（弱）劣策略：
  - 可以用于重复剔除劣策略寻找博弈的解，但是比严格劣策略的版本对理性的要求更强；
  - 颤抖的手原则：考虑列参与人分别以 $x$ 和 $1-x$ 的概率选择 $L$ 和 $R$ $(0 < x < 1)$，那么行参与人会选择 $B$，因为 $T$ 的期望效用是 $x + 2(1-x) = 2 - x$，而 $B$ 的期望效用是 2。

# 弱占优

重复剔除劣策略的过程中如果只有严格劣策略，那么结果不依赖于剔除的顺序（自行证明），但是剔除弱劣策略的顺序可能会影响结果：

**例**

请找出两种剔除弱劣策略的顺序使得下表所示博弈最终的解不同：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| | $T$ | 1, 2 | 2, 3 | 0, 3 |
| | $M$ | 2, 2 | 2, 1 | 3, 2 |
| | $B$ | 2, 1 | 0, 0 | 1, 0 |

CONTENT

# 目录

# 纳什均衡的引入

并非所有博弈都有占优策略，例如：

参与人 2

参与人 1

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2, 1$ | $2, -20$ |
| $M$ | $3, 0$ | $-10, 1$ |
| $B$ | $-100, 2$ | $3, 3$ |

- 可以换一个角度考虑：如果一个参与人已知他人使用的策略，那么他参加的博弈实际上就是要选择一个“最佳应对”；

# 纳什均衡的引入

并非所有博弈都有占优策略，例如：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $2, 1$ | $2, -20$ |
| | $M$ | $3, 0$ | $-10, 1$ |
| | $B$ | $-100, 2$ | $3, 3$ |

- 可以换一个角度考虑：如果一个参与人已知他人使用的策略，那么他参加的博弈实际上就是要选择一个“最佳应对”；
- 考虑策略组合 $(B, R)$，此时每个人都不愿意单独偏离这一组合，因为 $B$ 和 $R$ 各自是对方的最佳应对；
  - 也就是说，如果其它参与人确实根据 $(B, R)$ 选择了策略，那么每个人都不愿意单独偏离这一组合，所以这一策略组合是稳定的。

# 纳什均衡

将前述直观转化为严谨的表达：

**定义**

令 $s_{-i}$ 为参与人 $i$ 之外的所有参与人的策略组合，参与人 $i$ 的策略 $s_i$ 是 $s_{-i}$ 的一个**最佳应对（best response）**，如果满足

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

# 纳什均衡

将前述直观转化为严谨的表达：

**定义**

令 $s_{-i}$ 为参与人 $i$ 之外的所有参与人的策略组合，参与人 $i$ 的策略 $s_i$ 是 $s_{-i}$ 的一个**最佳应对（best response）**，如果满足

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

基于此，可以定义博弈论中最为核心的解概念——纳什均衡：

**定义**

一个策略组合 $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ 是一个**纳什均衡（Nash equilibrium）**，如果对于每个参与人 $i$，$s_i^*$ 是 $s_{-i}^*$ 的一个最佳应对。

基于最优反应的定义通常用于计算纳什均衡，下面这一纳什均衡的等价定义在表达上更为直接：

**定义**

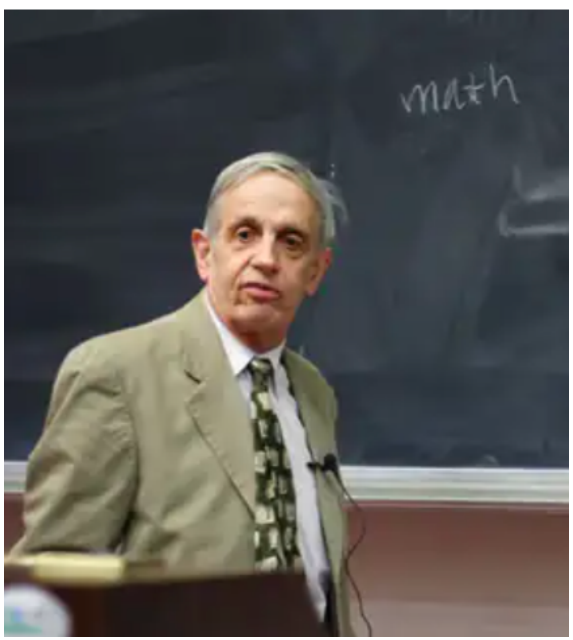
一个策略组合 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡，如果对于每个参与人 $i$ 和任意的策略 $s_i \in S_i$ 都有

$$u_i(s^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

- 如果 $u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s)$，那么策略 $\hat{s}_i$ 是参与人 $i$ 有利可图的策略偏离，因此纳什均衡的策略向量不允许存在有利可图的策略偏离；
- 因此纳什均衡的合理性直观就是这一策略组合是“稳定的”；
- 通过这一理解可以很容易明白为什么上述定义与此前基于最优反应的定义是等价的。

# 纳什均衡

- 1950 年，22 岁的纳什以非合作博弈为题的 27 页博士论文毕业。他在那篇仅仅 27 页的博士论文中提出了纳什均衡的，并奠定了数十年后（1994 年）获得诺贝尔经济学奖的基础；
- 然而这个工作被冯诺伊曼评价为“Another fixed point theorem”；
- 可以说以纳什均衡为核心的博弈论颠覆了传统经济学理论研究方法论；
- 为什么时隔这么久——纳什的传奇一生（电影《美丽心灵》）；
- 同年获得诺贝尔奖的经济学家：莱因哈德 · 泽尔腾（Reinhard Selten）和约翰 · 海萨尼（John C. Harsanyi）的工作将在下一讲介绍。




# 离散策略求解

使用最优反应函数的纳什均衡定义可以非常轻松地求解策略空间离散的情况下的纳什均衡：

**例**

计算下表所示博弈的纳什均衡：

参与人 2

| 参与人 1 | | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| | $T$ | 1, 2 | 2, 3 | 0, 3 |
| | $M$ | 2, 2 | 2, 1 | 3, 2 |
| | $B$ | 2, 1 | 0, 0 | 1, 0 |

本质上是求解两个人最优反应的交点，此时两个人的策略互为最优反应。

# 连续策略求解：古诺竞争

此前介绍的伯川德竞争是两个寡头进行价格竞争的情况，下面介绍的古诺竞争是两个寡头进行产量竞争的情况。

**例**

两家制造商 1 和 2 生产相同的产品，在同一市场中竞争潜在的顾客。两家制造商同时选择产量，总产量决定产品的市场价格，市场价格对两家企业而言是相同的。用 $q_1$ 和 $q_2$ 分别表示两家企业的产量，因此 $q_1+q_2$ 是市场的总产量。假设供给为 $q_1+q_2$ 时，每件产品的价格为 $2-q_1-q_2$。假设两家厂商的单位生产成本分别为正实数 $c_1, c_2$，试求解这一博弈的纳什均衡。

# 连续策略求解：古诺竞争

此前介绍的伯川德竞争是两个寡头进行价格竞争的情况，下面介绍的古诺竞争是两个寡头进行产量竞争的情况。

**例**

两家制造商 1 和 2 生产相同的产品，在同一市场中竞争潜在的顾客。两家制造商同时选择产量，总产量决定产品的市场价格，市场价格对两家企业而言是相同的。用 $q_1$ 和 $q_2$ 分别表示两家企业的产量，因此 $q_1+q_2$ 是市场的总产量。假设供给为 $q_1+q_2$ 时，每件产品的价格为 $2-q_1-q_2$。假设两家厂商的单位生产成本分别为正实数 $c_1,c_2$，试求解这一博弈的纳什均衡。

博弈定义：两人博弈，每个参与人的策略集合是 $[0,+\infty)$，如果参与人 1 选择策略 $q_1$，参与人 2 选择策略 $q_2$，那么参与人 1 的效用（利润）是

$$u_1(q_1,q_2)=(2-q_1-q_2)q_1-c_1q_1=q_1(2-q_1-q_2-c_1),$$

参与人 2 的效用是

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(2-q_1-q_2-c_2).$$

# 连续策略求解：古诺竞争

使用最优反应的定义求解纳什均衡，首先求参与人 1 关于 $q_2$ 的最优反应 $R(q_2)$，即将最大化 $u_1(q_1, q_2)$ 的 $q_1$ 定义为 $R(q_2)$：

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 2 - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0,$$

解得

$$R(q_2) = \frac{2 - q_2 - c_1}{2}.$$

注意 $u_1(q_1, q_2)$ 关于 $q_1$ 是凹函数，因此一阶条件得到的是最大值点。

同理对于参与人 2，可以解得

$$R(q_1) = \frac{2 - q_1 - c_2}{2}.$$

# 连续策略求解：古诺竞争



联立上述方程：

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{2 - q_2^* - c_1}{2} \\ q_2^* = \dfrac{2 - q_1^* - c_2}{2} \end{cases}$$

从而可以解得均衡策略为

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3}, q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

# 连续策略求解：古诺竞争

联立上述方程：

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{2 - q_2^* - c_1}{2} \\ \\ q_2^* = \dfrac{2 - q_1^* - c_2}{2} \end{cases}$$

从而可以解得均衡策略为

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3}, q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

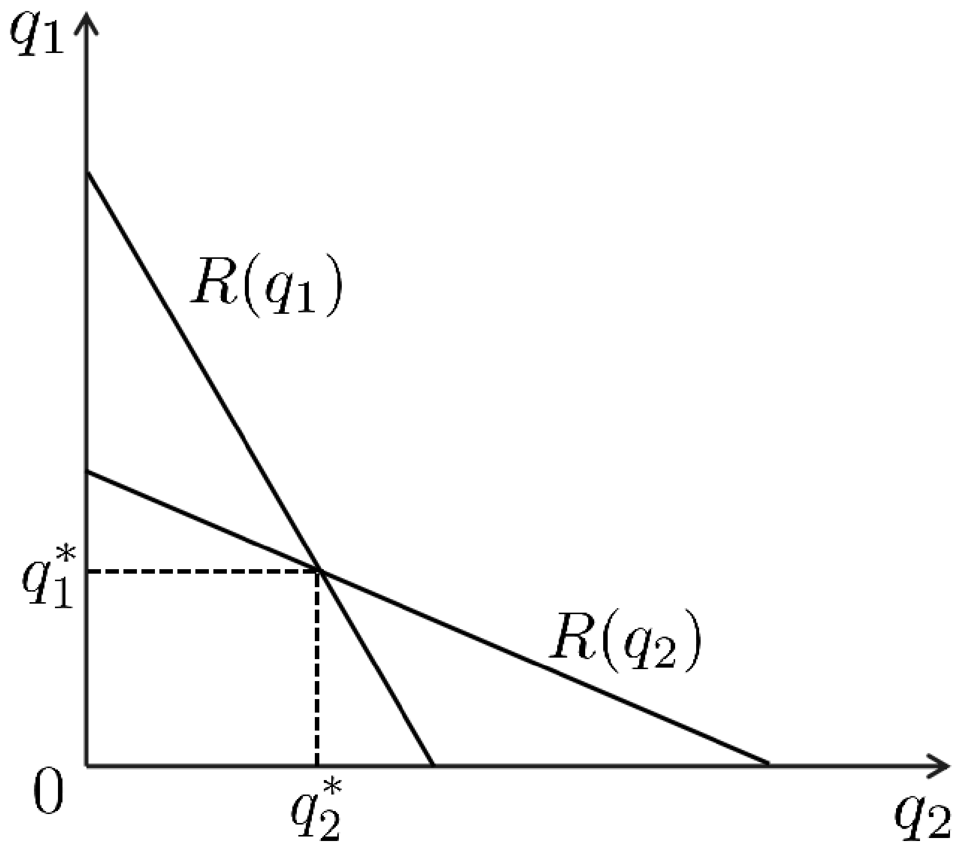
不难看出，在均衡中，自己的成本越高，均衡产量越低；对方的成本越高，会导致对方均衡产量降低，从而给自己提高产量的机会。因此这一结果是非常符合直观的。

- **目标不只是解出均衡，而是通过解看出模型是否符合现实，对于现实情况有什么参考价值。**

# 连续策略求解：古诺竞争



均衡求解图示：




此前给出的伯川德竞争结果是否构成纳什均衡？是否构成占优策略均衡？

# 纳什均衡的意义：协调博弈

两个将军考虑是否要合作进攻，如果两个将军合作进攻，则各自可以领赏，没有进攻则领不到赏，但如果只有一方进攻，则进攻者会输得很惨，这个博弈会走向何方？

将军 2

| 将军 1 | | 进攻 | 不进攻 |
|---|---|---|---|
| | 进攻 | $1, 1$ | $-2, 0$ |
| | 不进攻 | $0, -2$ | $0, 0$ |

如果全班 75% 的同学选择攻击，则攻击成功，参与攻击的获得总评 1 分的加分；否则攻击失败，参与攻击的同学会扣 2分。你会选择什么？

# 纳什均衡的意义：协调博弈



两个将军考虑是否要合作进攻，如果两个将军合作进攻，则各自可以领赏，没有进攻则领不到赏，但如果只有一方进攻，则进攻者会输得很惨，这个博弈会走向何方？

将军 2

| 将军 1 | | 进攻 | 不进攻 |
|---|---|---|---|
| | 进攻 | 1, 1 | −2, 0 |
| | 不进攻 | 0, −2 | 0, 0 |

如果全班 75% 的同学选择攻击，则攻击成功，参与攻击的获得总评 1 分的加分；否则攻击失败，参与攻击的同学会扣 2分。你会选择什么？

- 现实往往达不到纳什均衡：需要充分的交流或多次博弈达到稳态或者有一个仲裁者建议（相关均衡），这也是协调博弈的意义；
- 纳什均衡需要精炼：如果博弈存在两个纳什均衡，哪一个更合理？
- 均衡与物种演化也有关联。