21188142: 课程综合实践 II（数据要素交易基础） **2025-2026 学年短学期**

HW 2: 机制设计与信息设计基础

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2025 年 7 月 2 日

2.1 N 人一价拍卖均衡

假设有 N 个竞拍者，并且 N 个竞拍者的估值是独立的，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。N 个竞拍者的真实估值记为 $t_1,\dots,t_n$。

1. 求解博弈的递增对称纯策略贝叶斯纳什均衡 β（注意 $\beta(0)=0$）;
2. 从上述结果中你能获得什么启示?

对参与人 i，记其他 $N-1$ 个参与人的最大估值为随机变量 Y，则根据次序统计量的分布，Y 的分布函数为 $G(y)=\Pr[Y<y]=y^{N-1}$。记所有参与人估值为 t 时的递增对称纯策略均衡为 $\beta(t)$，则参与人 i 出价 b_i 时赢下拍卖的概率为

$$\Pr[b_i>\max_{j\neq i}\beta(t_j)]=\Pr[b_i>\beta(\max_{j\neq i}t_j)]=\Pr[b_i>\beta(Y)]=\Pr[Y<\beta^{-1}(b_i)]=[\beta^{-1}(b_i)]^{N-1},$$

因此期望效用为

$$[\beta^{-1}(b_i)]^{N-1}(t_i-b_i),$$

求一阶条件，代入 $b_i=\beta(t_i)$ 可得

$$[t_i^{N-1}\beta(t_i)]'=(N-1)t_i^{N-1}.$$

两边积分，并注意 $\beta(0)=0$，可以解得

$$\beta(t)=\frac{N-1}{N}t.$$

不难看出 N 越大 $\beta(t)$ 越大，说明竞争越大会导致报价更高。

2.2 收入等价原理

有 N 个竞拍者，并且 N 个竞拍者的估值是独立的，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。考虑如下规则的全支付拍卖：每个竞拍者提交一个报价，报价最高的竞拍者赢得物品，但所有竞拍者无论是否获得物品都要支付自己的报价。注意，以下讨论只考虑考虑估价为 0 的竞拍者的期望支付为 0 的递增对称均衡。

1. 求 2.1 题的均衡下一个估值为 x 的竞拍者的均衡期望支付 $m(x)$；
2. 求 2.1 题的均衡下卖家的期望收入；
3. 根据收入等价原理证明：全支付拍卖的递增对称均衡就是 $\beta(x) = m(x)$。

期望支付等于赢下拍卖的概率乘以赢下拍卖时的支付：

$$\Pr[\beta(x) > \max_{j \neq i} \beta(t_j)] \cdot \beta(x) = \frac{N-1}{N} x^N,$$

站在卖家的角度，x 是随机变量，因此一个竞拍者带来的期望收入为

$$\int_0^1 \frac{N-1}{N} x^N = \frac{N-1}{N(N+1)},$$

故 N 个竞拍者带来的的期望收入为

$$N \cdot \frac{N-1}{N(N+1)} = \frac{N-1}{N+1}.$$

在全支付拍卖中，由于每个竞拍者都要支付自己的报价，因此每个竞拍者的报价就等于一价拍卖时一个竞拍者的期望支付，这样所有竞拍者的报价之和（卖家收益）就会等于一价拍卖的卖家收益。

2.3 反向拍卖的迈尔森引理

在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购产品的卖家。每位竞拍者 i 报出自己产品的成本 c_i，买家收到所有竞拍者报告的成本向量后决定分配规则 $\boldsymbol{x}$ 和支付规则 $\boldsymbol{p}$，其中 $x_i(c_i)$ 表示竞拍者 i 报告成本 c_i 时购买竞拍者 i 产品的概率，$p_i(c_i)$ 表示竞拍者 i 报告成本 c_i 且**竞拍者 i 的产品被购买时**给竞拍者 i 的支付。

假设竞拍者的产品没有被卖出时的效用为 0，因此竞拍者 i 报出任意的 c_i' 时的期望效用可以表达为

$$u_i(c_i') = x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i).$$

1. 根据 DSIC 的定义写出反向拍卖机制 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 满足 DSIC 时竞拍者效用应当满足的条件；
2. 根据课上给出的迈尔森引理，给出并证明反向拍卖机制是 DSIC 的充要条件（假设 $c \to \infty$ 时，$c \cdot x_i(c) \to 0$ 且 $p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$）。

DSIC 的条件不难写出为（估值为 c_i 的竞拍者报告 c_i 最好）

$$x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i) \leqslant x_i(c_i) \cdot (p_i(c_i) - c_i).$$

反之估值为 c_i' 的竞拍者报告 c_i' 最好

$$x_i(c_i) \cdot (p_i(c_i) - c_i') \leqslant x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i').$$

结合以上两式可得

$$x_i(c_i') \cdot c_i' - x_i(c_i) \cdot c_i' \leqslant x_i(c_i') \cdot p_i(c_i') - x_i(c_i) \cdot p_i(c_i) \leqslant x_i(c_i') \cdot c_i - x_i(c_i) \cdot c_i.$$

综合不等号左右两端可知 $(x_i(c_i') - x_i(c_i))(c_i' - c_i) \leqslant 0$，因此 $x_i(c_i)$ 应当单调递减。接下来不等号内三式同时除以 $c_i' - c_i$，且令 $c_i' \to c_i$，则有

$$(x_i(c_i) \cdot p_i(c_i))' = c_i \cdot x_i'(c_i).$$

两边从 c 到 ∞ 积分，使用题目条件以及分部积分可得

$$p_i(c) = c + \frac{1}{x_i(c)} \int_c^{\infty} x_i(c_i) \mathrm{d}c_i.$$

总而言之，上式结合 x_i 的单调递减性质就是 DSIC 的必要条件，充分条件的证明比较简单，直接验证即可，故略去。

2.4 虚拟估值和正则性条件

本题将推导出对于虚拟估值 $c(v) = v - \dfrac{1 - F(v)}{f(v)}$ 和正则化条件的有趣描述。考虑 $[0, v_{\max}]$ 上严格单调递增的分布函数 F，其概率密度函数 f 为正，其中 $v_{\max} < +\infty$。对于估值服从分布 F 的竞拍者，当交易成功概率为 $q \in [0, 1]$ 时，定义 $V(q) = F^{-1}(1 - q)$ 为物品的"价格"，进而可以定义 $R(q) = q \cdot V(q)$ 为从竞拍者处获得的期望收益。称 $R(q)$ 为 F 的收益曲线函数，注意 $R(0) = R(1) = 0$。

1. 请解释为什么 $V(q)$ 可以被视为物品的价格；
2. $[0, 1]$ 上的均匀分布的收益曲线函数是什么?
3. 证明收益曲线在 q 点的斜率（即 $R'(q)$）是 $c(V(q))$，其中 c 是虚拟估值函数；
4. 证明当且仅当收益曲线是凹的时候，概率分布是正则的。

1. $\Pr[v < V(q)] = F(V(q)) = 1 - q$，即估值小于"价格"的概率为 $1 - q$，即估值大于等于价格（交易成功）的概率 q，符合直观；
2. $q(1 - q)$；
3. $R'(q) = V(q) + qV'(q) = V(q) - q \cdot \frac{1}{f(V(q))} = c(V(q))$；
4. 收益曲线凹等价于 $R''(q) = c'(V(q)) \cdot V'(q) \leqslant 0$，而 $V'(q) < 0$，故 $c'(V(q)) \geqslant 0$ 对任意的 q 成立。根据 $V(q)$ 的定义，$V(q)$ 的值域就是 F 的支撑集 $[0, v_{\max}]$，故 c 在 $[0, v_{\max}]$ 上单调递增，即概率分布是正则的。

2.5 贝叶斯劝说：检察官与法官

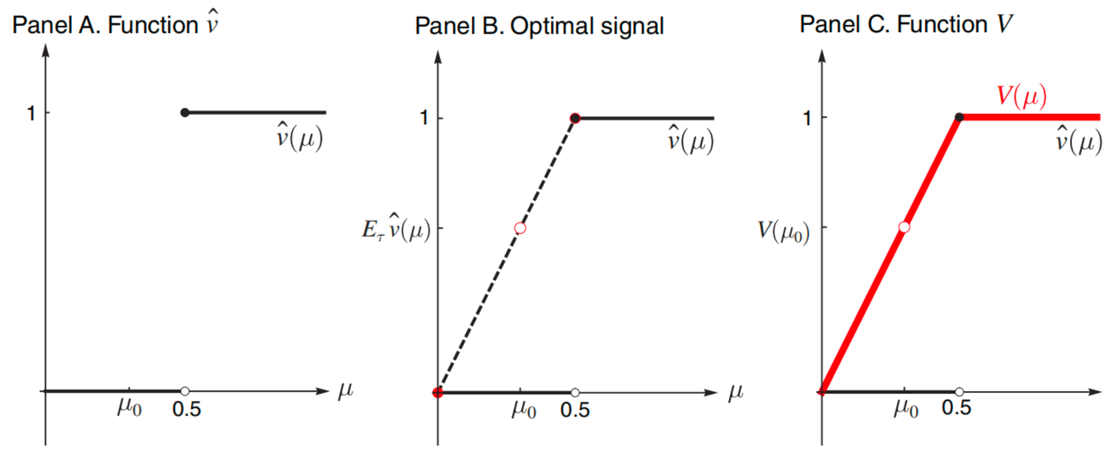
考虑检察官劝说法官判决的例子：假设法官（信号接收者）对于一个被告人，必须做出以下两种决策之一：判决有罪（convict）或无罪释放（acquit）。

- 被告人有两种类型：有罪（guilty）或无罪（innocent）；
- 法官在公正判决下获得的效用为 1：如果有罪被判有罪，无罪被判无罪，否则效用为 0；
- 检察官（信号发送者）为法官提供有关被告的证据（发送信号），如果被告人判有罪，检察官获得效用 1，否则效用为 0；
- 法官和检察官对被告人的类型有相同的先验概率分布：$\mu_0(\text{guilty}) = 0.3$ $\mu_0(\text{innocent}) = 0.7$。

检察官进行调查收集有关被告人的证据，因此检察官的策略是选择一个提供证据的策略，希望改变法官的判决，使得被判有罪的越多越好（检查官效用最大化）。形式化地说，提供证据就是一个 $\pi(\cdot|\text{guilty})$ 和 $\pi(\cdot|\text{innocent})$ 的信号机制，并且这一信号机制在博弈前是公开给法官的（或者说可验证的）。

1. 根据信息设计的显示原理，给出下面需要考虑的信号机制的形式；
2. 求检察官使用完全诚实的信号机制的情况下，检察官和法官的效用；
3. 求检察官最优信号机制下检察官的效用，以及最优信号机制下法官后验概率分布的分布；
4. 求检察官的最优信号机制。

1. 只需要考虑信号实现集合 $S = \{g, i\}$ 即可，其中 g 表示有罪的证据，i 表示无罪证据，相应的概率分布略去；
2. 完全诚实情况下法官给有罪的判有罪，无罪的判无罪，则法官效用为 1；检察官效用为 0.3，因为只有 30% 的人被判有罪；
3. 不难画出下图，则最优信号机制下检察官效用为 $V(\mu_0) = 0.6$，后验概率分布的分布的支撑集为 μ_i, μ_g，其中
$$\mu_i(\text{innocent}) = 1, \mu_i(\text{guilty}) = 0,$$
$$\mu_g(\text{innocent}) = 0.5, \mu_g(\text{guilty}) = 0.5.$$
概率为 $\tau(\mu_i) = 0.4, \tau(\mu_g) = 0.6$；
4. 最优信号机制为
$$\pi(i \mid \text{innocent}) = 4/7, \pi(i \mid \text{guilty}) = 0,$$
$$\pi(g \mid \text{innocent}) = 3/7, \pi(g \mid \text{guilty}) = 1.$$



2.6 信息的价值

设自然的状态集合为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，买家的先验分布为 $\mu_0(\omega_1) = 0.7, \mu_0(\omega_2) = 0.3$。设买家的行动集合为 $A = \{a_1, a_2\}$，效用函数为

$$u(a_1, \omega_1) = 2, u(a_1, \omega_2) = 0,$$
$$u(a_2, \omega_1) = 0, u(a_2, \omega_2) = 3.$$

记 $\mu_0(\omega_1) = \theta$，则 $\mu_0(\omega_2) = 1 - \theta$。假设有一个数据卖家提供如下信号机制：$S = \{s_1, s_2\}$，且

$$\pi(s_1 \mid \omega_1) = 0.9, \pi(s_2 \mid \omega_1) = 0.1,$$
$$\pi(s_1 \mid \omega_2) = 0.7, \pi(s_2 \mid \omega_2) = 0.3.$$

求卖家信号机制对买家的价值。

先验分布下买家选择 a_1 的期望效用为 $0.7 \times 2 = 1.4$，选择 a_2 的期望效用为 $0.3 * 3 = 0.9$，因此先验分布下买家最优行动是 a_1，对应期望效用为 1.4。根据贝叶斯公式不难算出得到信号机制后的后验概率分布为 $\mu_{s_1}(\omega_1) = 0.75, \mu_{s_2}(\omega_1) = 7/16$，后验概率分布的分布 $\tau(\mu_{s_1}) = 0.84, \tau(\mu_{s_2}) = 0.16$。看到 s_1 时根据 μ_{s_1} 可知最优行动是 a_1，期望效用为 1.5；看到 s_2 时根据 μ_{s_2} 可知最优行动是 a_2，期望效用是 27/16，因此看到信号机制后的期望效用为 $0.84 \times 1.5 + 0.16 \times 27/16 = 1.53$。因此信息的价值等于 $1.53 - 1.4 = 0.13$。