21188142: 课程综合实践 II（数据要素交易基础） **2025-2026 学年短学期**

HW 2: 机制设计与信息设计基础

教师：刘金飞，助教：吴一航 日期: 2025 年 7 月 2 日

2.1 N 人一价拍卖均衡

假设有 N 个竞拍者，并且 N 个竞拍者的估值是独立的，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。N 个竞拍者的真实估值记为 $t_1,\ldots,t_n$。

1. 求解博弈的递增对称纯策略贝叶斯纳什均衡 β（注意 $\beta(0)=0$）；
2. 从上述结果中你能获得什么启示?

2.2 收入等价原理

有 N 个竞拍者，并且 N 个竞拍者的估值是独立的，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。考虑如下规则的全支付拍卖：每个竞拍者提交一个报价，报价最高的竞拍者赢得物品，但所有竞拍者无论是否获得物品都要支付自己的报价。注意，以下讨论只考虑考虑估价为 0 的竞拍者的期望支付为 0 的递增对称均衡。

1. 求 2.1 题的均衡下一个估值为 x 的竞拍者的均衡期望支付 $m(x)$；
2. 求 2.1 题的均衡下卖家的期望收入；
3. 根据收入等价原理证明：全支付拍卖的递增对称均衡就是 $\beta(x)=m(x)$。

2.3 反向拍卖的迈尔森引理

在反向拍卖中，买家作为拍卖师通常具有一些采购需求，竞拍者是待采购产品的卖家。每位竞拍者 i 报出自己产品的成本 c_i，买家收到所有竞拍者报告的成本向量后决定分配规则 $\boldsymbol{x}$ 和支付规则 $\boldsymbol{p}$，其中 $x_i(c_i)$ 表示竞拍者 i 报告成本 c_i 时购买竞拍者 i 产品的概率，$p_i(c_i)$ 表示竞拍者 i 报告成本 c_i 且**竞拍者 i 的产品被购买时**给竞拍者 i 的支付。

假设竞拍者的产品没有被卖出时的效用为 0，因此竞拍者 i 报出任意的 c_i' 时的期望效用可以表达为

$$u_i(c_i') = x_i(c_i') \cdot (p_i(c_i') - c_i).$$

1. 根据 DSIC 的定义写出反向拍卖机制 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 满足 DSIC 时竞拍者效用应当满足的条件；
2. 根据课上给出的迈尔森引理，给出并证明反向拍卖机制是 DSIC 的充要条件（假设 $c \to \infty$ 时，$c \cdot x_i(c) \to 0$ 且 $p_i(c) \cdot x_i(c) \to 0$）。

2.4 虚拟估值和正则性条件

本题将推导出对于虚拟估值 $c(v) = v - \dfrac{1 - F(v)}{f(v)}$ 和正则化条件的有趣描述。考虑 $[0, v_{\max}]$ 上严格单调递增的分布函数 F，其概率密度函数 f 为正，其中 $v_{\max} < +\infty$。对于估值服从分布 F 的竞拍者，当交易成功概率为 $q \in [0,1]$ 时，定义 $V(q) = F^{-1}(1-q)$ 为物品的“价格”，进而可以定义 $R(q) = q \cdot V(q)$ 为从竞拍者处获得的期望收益。称 $R(q)$ 为 F 的收益曲线函数，注意 $R(0) = R(1) = 0$。

1. 请解释为什么 $V(q)$ 可以被视为物品的价格；
2. $[0,1]$ 上的均匀分布的收益曲线函数是什么?
3. 证明收益曲线在 q 点的斜率（即 $R'(q)$）是 $c(V(q))$，其中 c 是虚拟估值函数；
4. 证明当且仅当收益曲线是凹的时候，概率分布是正则的。

2.5 贝叶斯劝说：检察官与法官

考虑检察官劝说法官判决的例子：假设法官（信号接收者）对于一个被告人，必须做出以下两种决策之一：判决有罪（convict）或无罪释放（acquit）。

- 被告人有两种类型：有罪（guilty）或无罪（innocent）；
- 法官在公正判决下获得的效用为 1：如果有罪被判有罪，无罪被判无罪，否则效用为 0；
- 检察官（信号发送者）为法官提供有关被告的证据（发送信号），如果被告人判有罪，检察官获得效用 1，否则效用为 0；
- 法官和检察官对被告人的类型有相同的先验概率分布：$\mu_0(\text{guilty}) = 0.3$ $\mu_0(\text{innocent}) = 0.7$。

检察官进行调查收集有关被告人的证据，因此检察官的策略是选择一个提供证据的策略，希望改变法官的判决，使得被判有罪的越多越好（检查官效用最大化）。形式化地说，提供证据就是一个 $\pi(\cdot|\text{guilty})$ 和 $\pi(\cdot|\text{innocent})$ 的信号机制，并且这一信号机制在博弈前是公开给法官的（或者说可验证的）。

1. 根据信息设计的显示原理，给出下面需要考虑的信号机制的形式；

2. 求检察官使用完全诚实的信号机制的情况下，检察官和法官的效用；
3. 求检察官最优信号机制下检察官的效用，以及最优信号机制下法官后验概率分布的分布；
4. 求检察官的最优信号机制。

2.6 信息的价值

设自然的状态集合为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，买家的先验分布为 $\mu_0(\omega_1) = 0.7, \mu_0(\omega_2) = 0.3$。设买家的行动集合为 $A = \{a_1, a_2\}$，效用函数为

$$u(a_1, \omega_1) = 2, u(a_1, \omega_2) = 0,$$
$$u(a_2, \omega_1) = 0, u(a_2, \omega_2) = 3.$$

记 $\mu_0(\omega_1) = \theta$，则 $\mu_0(\omega_2) = 1 - \theta$。假设有一个数据卖家提供如下信号机制：$S = \{s_1, s_2\}$，且

$$\pi(s_1 \mid \omega_1) = 0.9, \pi(s_2 \mid \omega_1) = 0.1,$$
$$\pi(s_1 \mid \omega_2) = 0.7, \pi(s_2 \mid \omega_2) = 0.3.$$

求卖家信号机制对买家的价值。