市场分割的交易

阳先毅

浙江大学计算机科学与技术学院

879946238@qq.com

2025 年 12 月 4 日

目录

引入

注：此 slides 由张文章老师的板书梳理而来，是 Kai Hao Yang 的原论文《Selling Consumer Data for Profit: Optimal Market-Segmentation Design and Its Consequences》的一种简化。

IDEA: 平台拥有消费者的私人信息，而厂商没有，因此他可以凭借私人信息诱导出不同的市场分割并将其"版本化"地卖给不同的买家。

在我们的市场分割菜单模型（以下称"原始模型"）中，一共有 3 类参与者，分别是消费者，平台，以及厂商，我们限定仅仅交易一个商品，不同消费者对商品有不同的偏好，不同厂商有不同的生产成本：

- 消费者：不失一般性，我们将消费者视作"1"个，其偏好 $u \in V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, 对应分布 $x^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\}$
- 厂商：厂商可能生产成本为 $\theta \in C = \{c_1, c_2, ..., c_L\}$，对应的分布为 $g = \{g_1, g_2, ..., g_L\}$

引入

平台拥有消费者的私人信息（价值），但它却不知道厂商的私有信息（成本），它可以设计一个市场分割：$\delta \in \Delta(V^2)$, 满足

$$x^* = \sum_{x \in Supp\delta} x\,\delta(x)$$

在满足可行性约束的前提下，它可以针对每个厂商的潜在成本 c_l 设计 L 个合同，以最大化自己的利润，合同即 $(\delta_\theta, \tau_\theta)_{\theta \in C}$

- δ_θ: 类型为 θ 的消费者会获得的市场分割。
- τ_θ: 类型为 θ 的消费者向平台的转移支付。

厂商观察到自己的价值 $c \in C$, 然后

- 1. 报告自己的成本 $\hat{\theta}$
- 2. 选择自己的定价策略 $\phi_{\theta,\hat{\theta}} \to V$

注：这里的“报告”其实就是从菜单当中选择某一项，对应《信息设计——统一视角》中的不带引出机制的信息设计。

产商的外部策略

这类问题比较复杂的一点是厂商是具有外部选择的，一般有两种情况

- 厂商按照加总市场 $x*$ 进行定价。
- 厂商直接退出该市场。

注意到前者比后者更强，对平台的设计限制更多。但前后两者核心思路是一致的，因此我们在后续仅仅探讨后者，即 IR 约束为 “参与我将获得不小于 0 的收益”。

博弈的时序

1. 平台宣布合同 $(\delta_\theta, \tau_\theta)_{\theta \in C}$
2. 厂商观察到自己的成本 $\theta \in C$
3. 厂商决定是否购买市场分割，若否，博弈结束；若是，它需要选择合同中的其中一项（即报告 $\hat{\theta}$），随后厂商会看到市场分割的结果，他可以在平台给它推送的每个细分市场都选择一个统一定价。
4. 消费者观察到自己的价值 u 以及厂商定价，决定是否购买。

对于平台来说，最大的难点在于解决 $\sigma \in \Delta(V^2)$ 的设计，这即是本文最大的难点。为了解决这个问题，Kai Hao Yang 考虑了另一个“更加简单”的模型（以下简称“销售模型”），并证明这两个模型的平台最优情况下：

- 对买家：物品分配结果相同，支付也相同。
- 对平台：利润相同。
- 对厂商：卖出的产品数量相同，利润相同。

以此说明了最优市场分割的形式。

销售模型

平台向厂商采购一定数量的产品，并直接出售给消费者。合同如下：
(q_l, t_l):$\{(q_1, t_1), (q_2, t_2), ..., (q_L, t_L)\}$，其中：

- q_l: 平台向厂商采购的数量 (针对成本为 c_l 的厂家)。
- t_l: 平台向厂商的支付 (针对成本为 c_l 的厂家)。

平台得到产品后，理应按照一级价格歧视将产品出售给价值最高的那些消费者。我们记平台获得的利润为 $\chi(q)$ 为厂商售卖数量为 q 的物品时获得的利润（一级价格歧视下)。

即平台从高到低找到临界的 $\bar{k}$，使得：

$$\sum_{k=\bar{k}}^{K} x_k^* \geq q$$

且

$$\sum_{k=\bar{k}+1}^{K} x_k^* < q$$

销售模型-续

$$\chi(q) = v_K x_K^* + v_{K-1} x_{K-1}^* + \ldots + v_{\bar{k}}(q - \sum_{k=\bar{k}+1}^{K})$$

首先，显示原理告诉我们，我们只用设计一种讲真话的机制，使得厂商能够诚实地汇报出他们的真实类型，当然我们后续便需要考虑两个约束：IR 以及 IC。因此厂商的利润可以写为：

$$\text{Max}_{(q_1,t_1),\ldots,(q_L,t_L)} \sum_{l=1}^{L} (\chi(q_l) - t_l)\, g_l$$

$$s.t. - c_l q_l + t_l \geq -c_l q_m + t_m \quad \forall l, m \quad (IC)$$

$$- c_l q_l + t_l \geq 0 \quad \forall l \quad (IR)$$

另外，该机制隐含的一点是 $q_i > q_j$ 如果 $i < j$, 向低成本厂商采购的更多。

求解 IC,IR

我们主要考虑平台追求利润最大化时那些紧的约束。显然，对于 L 个 IR 约束，最高成本类型应该是紧的，其他都是松的。我们有：

$$-c_L q_L + t_L = 0$$

这一直觉在于我们可以总提取完最高成本类型厂家的所有剩余。又由 IC 保证其他 IR 约束都是松的。

下面我们来讨论 IC 约束，首先我们讨论低成本模仿高成本的 IC 约束，我们记类型为 c_l 的厂商模仿成本比他高一位的厂商的 IC 约束为 $IC(c_l, c_{l+1})$，而模仿成本比他高 m 位的厂商的 IC 约束为 $IC(c_l, c_{l+1})$。

我们希望说明：如果相邻位的厂商不会模仿，那也不会超出相邻位模仿。

我们可以在“相邻不模仿”假设下证厂商不会跨 2 位模仿，于是可递推至不会跨 m 位模仿。

求解 IC,IR

目前我们有：

$$
\begin{aligned}
& -c_l q_l + t_l \geq -c_l q_{l+1} + t_{l+1} && \text{(tmp 1)} \\
& -c_{l+1} q_{l+1} + t_{l+1} \geq -c_{l+1} q_{l+2} + t_{l+2} && \text{(tmp 2)}
\end{aligned}
$$

由 c_l 单调性我们知道，

$$
\begin{aligned}
-c_l q_l + t_l &\geq -c_l q_{l+1} + t_{l+1} \\
&\geq -c_{l+1} q_{l+1} + t_{l+1} \\
&\geq -c_{l+1} q_{l+2} + t_{l+2} \\
&> c_l(q_{l+1} - q_{l+2}) + t_{l+2} - c_{l+1} q_{l+1} \\
&\geq -c_l q_{l+2} + t_{l+2}
\end{aligned}
$$

因此我们需要考虑的 IC 约束一共只有 L 条。接下来我们要说明所有相邻 IC 约束都是紧的。

求解 IC,IR

假设 l 是不紧的当中最小的指标，使得

$$-c_l q_l + t_l > -c_l q_{l+1} + t_{l+1}$$

我们大抵可以令

$$\tilde{m} = t_m - \epsilon \quad \forall m \le l$$

此时并不会破坏任何现有约束，但是平台的利润提升，因此可知所有相邻的 IC 约束都会紧等。此时我们已经有 L 条等式构成的约束了，接下来容易证明证明在 L 条约束已经满足 IC 的另一个方向——即高成本并不会模仿低成本。因此证明略去。

L 条约束如下：

$$-c_L q_L + t_L = 0 \quad \text{(IR)}$$

$$-c_l q_l + t_l = -c_l q_{l+1} + t_{l+1} \quad \text{(IC-(l,l+1))}$$

求解 IC,IR

由此我们可以完整表示出 t_l:

$$\begin{aligned} t_l &= c_l(q_l - q_{l+1}) + t_{l+1} \\ &= c_l(q_l - q_{l+1}) + c_{l+1}(q_{l+1} - q_{l+2}) + t_{l+2} \\ &= \dots \\ &= c_l(q_l - q_{l+1}) + \dots + c_{L-1}(q_{L-1} - q_L) + c_L q_L \\ &= c_l q_l + \underbrace{(c_{l+1} - c_l) q_{l+1} + \dots + (c_L - c_{L-1}) q_L}_{\text{信息租}} \end{aligned}$$

接下来我们将平台的利润化简展开:

$$\text{Max}_{(q_1,t_1),\ldots,(q_L,t_L)} \sum_{l=1}^{L} (\chi(q_l) - t_l)\, g_l$$

$$= \sum_{l=1}^{L} (\chi(q_l) - c_l q_l - (c_{l+1} - c_l) q_{l+1} - \ldots - (c_L - c_{L-1}) q_L)\, g_l$$

求解 IC,IR

我们将 $q_{l+1}, \ldots, q_L$ 放到它们对应序号的求和函数当中，整理可得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{L}\left(\chi(q_l) - c_l q_l - (c_{l+1} - c_l) q_{l+1} - \cdots - (c_L - c_{L-1}) q_L\right) g_l \\ &= \sum_{l=1}^{L}\left\{\chi(q_l) - q_l\left(c_l + (c_l - c_{l-1})\frac{g_{l-1} + g_{l-2} + \cdots + g_1}{g_l}\right)\right\} g_l\end{aligned}$$

其中，

$$\phi(c_l) := \left(c_l + (c_l - c_{l-1})\frac{g_{l-1} + g_{l-2} + \cdots + g_1}{g_l}\right)$$

$\phi(c_l)$ 即类型 c_l 的厂商的虚拟成本 (这里我们假设其是正规的)，大大简化求和形式为：

$$\sum_{l=1}^{L}\left(\chi(q_l) - q_l \phi(c_l)\right)$$

显而易见，我们需要对每种 c_l，购买在原始市场中价值超过 $\phi(c_l)$ 的所有消费者的数量的产品，这样就能实现利益最大化，i.e.

$$q_l = \sum_{v_k^* \geq \phi(c_l)} x_k^*$$

回到原始模型

采购模型给我们（平台）的启示就是我们可以直接把采购模型当中最终售卖的那些客户直接推送给厂家。我们可以考虑制定最细的市场分割 $(\sigma_\theta, \tau_\theta)_{\theta \in C}$, 其中:

- 对所有 $v_k^* \geq \phi(c_\theta)$, 我们将单点市场 e_k 推送给商场。
- 更新后的加总市场仅仅包含高价值卖家，$\delta_\theta(e_k) = \frac{x_k^*}{q_\theta}$, 低价值的买家被抛弃。

下面混用一下 θ 和 l, 那么我们可以根据采购模型表示出原始模型的支付为:

$$\tau_l = \chi(q_l) - q_l c_l - \text{(采购模型下的信息租)}$$

接下来我们要证明由此构造出来的市场分割满足 IC 和 IR。由于支付是根据采购模型对应构造出来的，所以 IR 是自动满足的。(厂商的收益本质上信息租) 因此我们下面我将证明它也是 IC 的。

回到原始模型

考虑厂商偏移策略 $\psi_{l,\bar{l}} : Supp_{\sigma_{\bar{l}}} \to V$, 我们不失一般性的将成本分为两类 c_l 与 c_h

倘若低成本类型伪装成高成本：平台推给厂家：$v_k \geq \phi(c_h) \geq (c_l)$, 因此厂家会选择生产所有推给它的 q。此时情况与采购模型一致。
倘若高成本类型伪装成低成本：

- 如果 $\phi(c_l) \geq c_h$, 那么平台推给厂家 $v_k \geq \phi(c_l) \geq (c_h)$, 厂家依旧会选择生产推送给我的所有 q。
- 如果 $\phi(c_l) < c_h$, 此时厂家有动机不服务价值低于生产成本的人，即这部分人为 $\Delta = v_k : \phi(c_l) \leq v_k < c_h$

阶段性总结一下，原始模型与采购不同之处在于，原始模型厂商更强，它可以选择不服务某一部分低价值群体，而采购模型则需要服务所有的 q(因为合同已经写死了)，前面我们已经说明采购模型的菜单已经在 IC,IR 下达到最优，如果在平台更弱，厂商更强的原始模型中，平台也能获得同等收益，那么我们就可以找到最优机制，而上述的偏离不能获益已经是我们的最后一块拼图了。

回到原始模型

再次强调，在原始模型提供的菜单中，偏移有两个阶段:

1. 我谎报类型来偏离。
2. 在 1 的基础上，我也许有动机偏离采购模型中的生产数量 q（因为我不必服务所有客户）。

如果在原模型中进行偏移（但依然按照采购模型的 q 服务所有推送客户），收益为:

$$\chi(q_l) - c_h q_l - \tau_l - (\chi(q_h) - c_h q_h - \tau_h) \leq 0$$

厂家不服务那部分买家带来的收益为 $\sum_{v_k \in \Delta}(c_h - v_k)x_k^*$, 因此我们现在想要证明的是，即使厂家偏离后不服务那部分买家，带来的收益也不为正:

$$\chi(q_l) - c_h q_l - \tau_l - (\chi(q_h) - c_h q_h - \tau_h) + \sum_{v_k \in \Delta}(c_h - v_k)x_k^* \leq 0 \qquad \text{(等待证明)}$$

回到原始模型

$$\chi(q_l) - c_h q_l - \tau_l - (\chi(q_h) - c_h q_h - \tau_h) + \sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^*$$

$$= \chi(q_l) - c_l q_l - (c_h - c_l) q_l - \tau_l - (\chi(q_h) - c_h q_h - \tau_h) + \sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^*$$

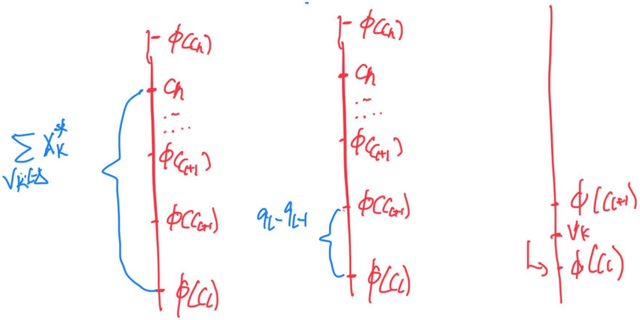
$$= \underbrace{(c_{l+1} - c_l) q_{l+1} + \cdots + (c_L - c_{L-1}) q_L}_{c_l \text{ 信息租}} - \underbrace{(c_{h+1} - c_h) q_{h+1} + \cdots + (c_L - c_{L-1}) q_L}_{c_h \text{ 信息租}}$$

$$- (c_h - c_l) q_l + \sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^*$$

$$= (c_{l+1} - c_l) q_{l+1} + \ldots + (c_h - c_{h-1}) q_h - (c_h - c_l) q_l + \sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^*$$

接下来我们尝试对 $\sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^*$ 进行放缩以便化简，为了不破坏目标不等式性质，我们可以将其放大。

回到原始模型



我们知道，v_k 是散落在 $\phi(c_l)$ 与 c_h 之间的（如图 1)，其中散落在 $\phi(c_{l+1})$ 与 $\phi(c_l)$ 的买家有 $q_l - q_{l-1}$ 这么多。于是我们可以把这个区间内买家的价值都缩小到 $\phi(c_l)$，实际上就可以放大每一段的 $c_h - v_k$。所以有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{v_k \in \Delta} (c_h - v_k) x_k^* \\
&\leq (c_h - \phi(c_l))(q_l - q_{l+1}) + (c_h - \phi(c_{l+1}))(q_{l+1} - q_{l+2}) \ldots (c_h - \phi(c_{d-1}))(q_{d-1} - q_d)
\end{aligned}
$$

回到原始模型

现在我们可以把前面这一部分重新整理：

$$
\begin{aligned}
&(c_{l+1}-c_l)q_{l+1}+\ldots+(c_h-c_{h-1})q_h-(c_h-c_l)q_l \\
&=-(c_h-c_l)(q_l-q_{l+1})-(c_h-c_{l+1})(q_{l+1}-q_{l+2})\ldots-(c_h-c_{h-1})(q_{h-1}-q_h)
\end{aligned}
$$

所以最终的偏移收益为：

$$
\begin{aligned}
&-(c_h-c_l)(q_l-q_{l+1})-(c_h-c_{l+1})(q_{l+1}-q_{l+2})\ldots-(c_h-c_{h-1})(q_{h-1}-q_h) \\
&+(c_h-\phi(c_l))(q_l-q_{l+1})+(c_h-\phi(c_{l+1}))(q_{l+1}-q_{l+2})\ldots(c_h-\phi(c_{d-1}))(q_{d-1}-q_d) \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

注意到 $d \leq h$, 所以第一行的项数不少于第二行。且第一行第 i 项加第二行第 i 项非正，所以整体非正。

□

总结

我们对市场分割的交易模型的分析经历了以下阶段:

1. 建立市场分割的交易模型，但发现δ 是难以直接求解的。
2. 于是我们考虑减少约束得到一个采购模型，并求出了采购模型的最优菜单(此时的平台收入实际上是原问题的一个上界)。
3. 我们将采购模型的最优菜单对应回原始模型，使得原始模型与采购模型销售的产品量与各方利润完全相同，且均满足 IC, IR。
4. 于是该机制平台利润达到了上界，该机制就是最优的。