椭球法
Ellipsoid Method

傅奕诚

fuycc@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 10 月 23 日

目录

问题背景：从 LP 到凸可行性

- 典型目标：求解线性规划（LP）

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^\top x \mid Cx \le d\} \tag{1}$$

  或更一般的**凸可行性问题**：在已知包含球 $B_2(0,R)$ 和未知的凸集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ 中，判定 K 非空并找到 $x\in K$，或在精度 ε 下逼近.
- **分离预言机（Separation Oracle）**：给定 x，判断 $x\in K$；若不在，返回一个**分离超平面**（或半空间）将 x 与 K 分开.
- 椭球法思想：用逐步缩小的椭球逼近未知凸集 K，每次利用分离信息更新椭球中心与形状.
- 历史意义：Khachiyan（1979）首次证明 LP 的**多项式时间可解性**.

LP 问题的规模-1

- 将整数 $z \in \mathbb{Z}$ 编码为其绝对值的二进制串，则 $\mathsf{size}(z) = \lceil \log(|z|+1) \rceil$
- 有理数 p/q $(p, q \in \mathbb{Z}，q \geqslant 1，\mathsf{gcd}(p,q) = 1)$：$\mathsf{size}(p/q) = \mathsf{size}(p) + \mathsf{size}(q)$
- 长度 n 的有理向量 v：$\mathsf{size}(v) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{size}(v_j)$
- $m \times n$ 有理矩阵 C，$\mathsf{size}(C) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mathsf{size}(c_{i,j})$
- 线性规划问题 $\min\{c^\top x | Cx \leqslant d, x \geqslant 0\}$：$\mathsf{size}(C, b, c) = \mathsf{size}(C) + \mathsf{size}(d) + \mathsf{size}(c)$

引理

- 对任意有理数 r，有 $|r| \leqslant 2^{size(r)} - 1$
- 对任意有理向量 $x \in \mathbb{Q}^n$，有 $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2^{size(x)} - 1$
- 对任意有理向量 $C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$，有 $|det(C)| \leqslant 2^{size(C)} - 1$

LP 问题的规模-2

引理

设多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \le b\}$ 非空，且 C, b 均为整数矩阵/向量． P 的规模定义为 $L = \textsf{size}(C) + \textsf{size}(d)$，则 P 的任一顶点 x 都满足 $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}2^L$.

证明.

对每个顶点 v，存在 $Cx \leqslant d$ 的一个非奇异子系统 $\bar{C}x = \bar{d}$. 根据 Cramer 法则，$x_i = \frac{\det \bar{C}_i}{\det \bar{C}}$，其中 $\bar{C}_i$ 是将 $\bar{C}$ 的第 i 列替换为向量 $\bar{d}$ 所得的矩阵．由于 $\bar{C}$ 是非奇异整数矩阵，于是 $\det \bar{C} \geqslant 1$，则

$$|x_i| \leqslant |\det \bar{C}_i| \leqslant 2^{\textsf{size}(\bar{C}_i)} - 1 \leqslant 2^L - 1$$

即 $\|x\|_\infty \leqslant 2^L$，于是 $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \leqslant \sqrt{n}2^L$ □

LP 问题的规模-3

引理

设多面体 $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Cx\le d\}$ 非空，且 C,d 均为整数，则 $\mathrm{vol}(P)\ge 2^{-(n+1)\mathsf{size}(C)-n^2}$.

目录

椭球的定义与几何性质

定义 (椭球)

对称正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 与中心 $a \in \mathbb{R}^n$ 定义:

$$\mathcal{E}(A, a) := \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^\top A^{-1}(x-a) \leqslant 1\}.$$

- 主轴方向: A 的特征向量; 半轴长度: $\sqrt{\lambda_i(A)}$.
- 由于 A 是正定矩阵, 存在正定矩阵 Q 使得 $A = QQ$, 那么

$$\mathcal{E}(A, a) = Q\mathcal{E}(I, 0) + a$$

  这里, $B(0,1) = \mathcal{E}(I, 0)$ 表示圆心为原点的单位球.
- 体积: $\mathrm{vol}(\mathcal{E}(A, a)) = \sqrt{\det A}\, V_n$ (V_n 为单位球的体积).

椭球的定义与几何性质

目标：在椭球上求解线性函数 $c^\top x$ 的最大值/最小值.

在单位球 $B(a,1)$ 上，$\max c^\top x$ 在 $x = a + \frac{c}{\|c\|}$ 处取得.
在椭球 $\mathcal{E}(A,a)$ 上，有：

$$Q^{-1}\mathcal{E}(A,a) = B(0,1) + Q^{-1}a = B(Q^{-1}a, 1).$$

因为（令 $y = Q^{-1}x$）：

$$\begin{aligned}
1 &\geqslant (x-a)^\top A^{-1}(x-a) \\
&= (Qy-a)^\top Q^{-1}Q^{-1}(Qy-a) \\
&= (Q(y-Q^{-1}a))^\top Q^{-1}Q^{-1}(Q(y-Q^{-1}a)) \\
&= (y-Q^{-1}a)^\top Q^\top Q^{-1}Q^{-1}Q(y-Q^{-1}a) \\
&= (y-Q^{-1}a)^\top I(y-Q^{-1}a)
\end{aligned}$$

目标：在椭球上求解线性函数 $c^\top x$ 的最大值/最小值.

在椭球 $\mathcal{E}(A,a)$ 上，有：

$$Q^{-1}\mathcal{E}(A,a) = B(0,1) + Q^{-1}a = B(Q^{-1}a, 1).$$

于是有：

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathcal{E}(A,a)} c^\top x &= \max_{Q^{-1}x\in Q^{-1}\mathcal{E}(A,a)} c^\top QQ^{-1}x \\
&= \max_{y\in S(Q^{-1}a,1)} c^\top Qy \\
&= c^\top Q\frac{1}{\|Qc\|}Qc + c^\top QQ^{-1}a \\
&= c^\top a + \sqrt{c^\top Ac}
\end{aligned}$$

同理，最小值为

$$\min_{x\in\mathcal{E}(A,a)} c^\top x = c^\top a - \sqrt{c^\top Ac}$$

椭球的定义与几何性质

令 $b = \frac{Ac}{\sqrt{c^\top Ac}}$，$z_{max} = a + b$，$z_{min} = a - b$，那么

$$c^\top z_{max} = c^\top a + \sqrt{c^\top Ac}, \quad c^\top z_{min} = c^\top a - \sqrt{c^\top Ac}$$

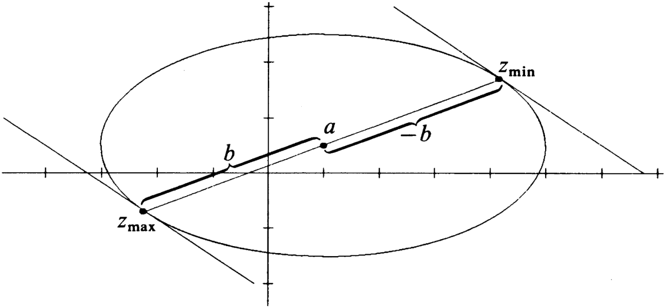


图: 二维椭球示例

Löwner–John 椭球

定理 (Löwner–John 椭球)

对于任意凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，存在唯一的包含 K 最小体积椭球 $\mathcal{E}$. 此外，若 $\mathcal{E}(A, a)$ 为此椭球，则将 $\mathcal{E}$ 从中心收缩 n 倍后得到的椭球包含于 K，即 $\mathcal{E}(n^{-2}A, a) \subseteq K$.

- 一般而言，K 的 Löwner–John 椭球计算困难.
- 但在某些条件下，可以在多项式时间内得到良好的近似.
- 椭球法及其变体常用到某些“椭球截面”的 Löwner–John 椭球；对这些特殊情形，存在显式公式.

中心切割与半椭球的 Löwner–John 椭球

设 $\mathcal{E}(A,a)$ 为椭球，$c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，定义：

$$\mathcal{E}'(A,a,c) := \mathcal{E}(A,a) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x \le c^\top a\}.$$

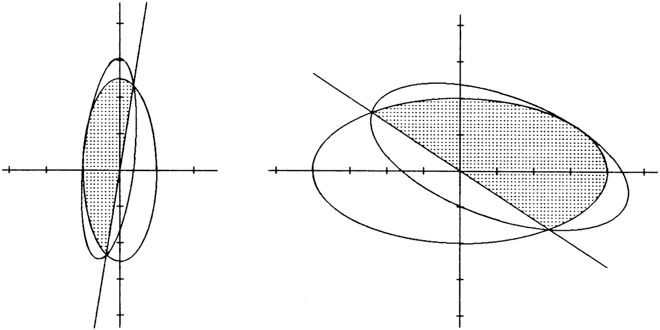
即通过超平面 $c^\top x = c^\top a$ 将椭球沿中心切为两半，$\mathcal{E}'(A,a,c)$ 是其一半. $\mathcal{E}'(A,a,c)$ 的 Löwner–John 椭球 $\mathcal{E}(A',a')$ 可由下式给出：

$$\begin{aligned} a' &= a - \frac{1}{n+1} b, \\ A' &= \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1} bb^\top\right), \end{aligned}$$

其中 $b = \dfrac{Ac}{\sqrt{c^\top A c}}$.

中心切割与半椭球的 Löwner–John 椭球

中心切割: $\mathcal{E}'(A, a, c) := \mathcal{E}(A, a) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x \le c^\top a\}$



(a) (b)

图: 中心切割

目录

基础椭球法

目标：判定 $P = \{x \mid Cx \leqslant d\}$ 是否为空，或找到 $x \in P$.

算法 基础椭球法

Input: 多面体 $P = \{x \in \mathbb{R} | Cx \leqslant d\}$，初始化椭球 $\mathcal{E}_0 \supseteq P$.
Output: $x \in P$ 或 $P = \emptyset$.
for $k = 0, 1, \ldots, N$ **do**
    if $a_k \in P$ **then**
        return a_k
    else
        存在 j 使得 $C_j a_k > d_j$，$\mathcal{E}_{k+1} \leftarrow$ 包含 $\mathcal{E}_k \cap \{x | C_j x \leqslant C_j a_k\}$ 的最小椭球
    end if
end for
return $P = \emptyset$

基础椭球法

目标：判定 $P = \{x \mid Cx \le d\}$ 是否为空，或找到 $x \in P$.

1. 如何初始化椭球 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(R^2\mathbf{I}, 0)$，使 $P \subseteq \mathcal{E}_0$？

$$R = \sqrt{n}2^L$$

2. 如何计算 $\mathcal{E}_{k+1}$？

$$a_{k+1} = a_k - \frac{1}{n+1} b_k, \quad A_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^\top\right)$$

其中 $b_k = \dfrac{A_k c}{\sqrt{c^\top A_k c}}$.

3. 如何确定 N？

停止条件 N-椭球体积收缩率

引理（椭球体积收缩率）

椭球 $\mathcal{E}_{k+1}$ 与 $\mathcal{E}_k$ 的体积满足 $\operatorname{vol}(\mathcal{E}_{k+1})/\operatorname{vol}(\mathcal{E}_k) < e^{-1/(2n)}$

证明.

为估计体积比，先考虑特殊情况：

$$F := \mathcal{E}(I, 0) = S(0, 1), \quad c = (-1, 0, \ldots, 0)^\top.$$

由更新公式可得：

$$b = (-1, 0, \ldots, 0)^\top, \quad a' = a - \tfrac{1}{n+1} b = (\tfrac{1}{n+1}, 0, \ldots, 0)^\top,$$

$$A' = \tfrac{n^2}{n^2-1}\left(I - \tfrac{2}{n+1} bb^\top\right) = \operatorname{diag}\left(\tfrac{n^2}{(n+1)^2}, \tfrac{n^2}{n^2-1}, \ldots, \tfrac{n^2}{n^2-1}\right).$$

□

停止条件 N-椭球体积收缩率

证明.

由 $\mathrm{vol}(\mathcal{E}(A,a)) = V_n\sqrt{\det A}$ 得:

$$\frac{\mathrm{vol}(F')}{\mathrm{vol}(F)} = \sqrt{\det A'} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

取自然对数得:

$$\ln\frac{\mathrm{vol}(F')}{\mathrm{vol}(F)} = \frac{1}{2}\left[(n+1)\ln\tfrac{n}{n+1} + (n-1)\ln\tfrac{n}{n-1}\right].$$

利用幂级数展开 $\ln(1\pm\frac{1}{n}) = \pm\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \pm \frac{1}{3n^3} - \cdots$ 得到

$$(n+1)\ln(\tfrac{n+1}{n}) + (n-1)\ln(\tfrac{n-1}{n}) > \frac{1}{n},$$

从而 $\mathrm{vol}(F')/\mathrm{vol}(F) < e^{-1/(2n)}$. □

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

停止条件 N-椭球体积收缩率

证明.

对一般椭球 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A, a)$，有

$$\mathcal{E} = Q\mathcal{E}(I, 0) + a = QF + a.$$

存在正交矩阵 M 将 Qc 旋转为 $(-1, 0, \ldots, 0)^\top$ 的倍数．定义仿射变换

$$T(x) := QM^\top x + a, \quad T^{-1}(x) = MQ^{-1}(x - a).$$

则 $T(F) = E$, $T(F') = E'$，且仿射变换保持体积比：

$$\frac{\mathrm{vol}(E')}{\mathrm{vol}(E)} = \frac{\mathrm{vol}(F')}{\mathrm{vol}(F)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-1/(2n)}.$$

$\square$

停止条件 N

引理

设 $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Cx\le d\}$ 为满维整数多面体，且初始椭球 $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}(A_0,a_0)$ 取 $a_0=0$、$A_0=R^2I$，其中 $R=\sqrt{n}2^L$. 若取

$$N=2n\big((2n+1)\textsf{size}(C)+n\textsf{size}(d)+2n^2\big)$$

步迭代，则 $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_N)\leqslant 2^{-(n+1)\textsf{size}(C)-n^2}\leqslant \mathrm{vol}(P)$

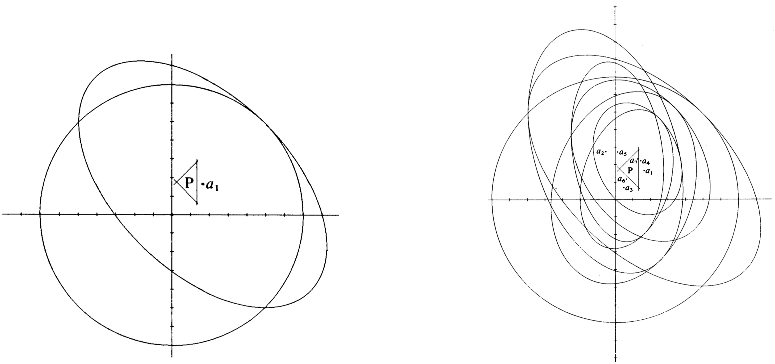
证明.

初始时 $\mathcal{E}_0\subseteq\{x \mid \|x\|_\infty\le R\}$，因此 $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_0)\leqslant(2R)^n\leqslant 2^{n(L+n)}$.
根据体积收缩引理，每一步体积至少缩小因子 $e^{-1/(2n)}$，故

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_N)<e^{-N/(2n)}\,\mathrm{vol}(\mathcal{E}_0)\leqslant e^{-N/(2n)}(2R)^n.$$

结合 P 的体积下界 $\mathrm{vol}(P)\geqslant 2^{-(n+1)\textsf{size}(C)-n^2}$，得
$\mathrm{vol}(E_N)<\mathrm{vol}(P)$. $\square$

椭球法示例



(a) 第一次迭代　(b) 第七次迭代

图: Löwner–John 椭球与其切割后的半椭球对比

分离预言机

线性规划问题：$\min\{c^\top x | Cx \leqslant d, x \geqslant 0\}$

分离预言机（Separation Oracle）：给定点 x，Oracle 要么告知 $x \in P$，要么给出一个超平面分离 p 与 K.

- 对于当前的椭球 $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(A_k, a_k)$，若 $a_k \notin \{x | Cx \leqslant d, x \geqslant 0\}$，则找出 $C_j a_k > b_j$，并用 $\{x | C_j x \leqslant C_j a_k\}$ 来切椭球.
- 若 a_k 满足约束，说明我们找到了一个可行解，为了找到最小化目标的解，可以用 $\{x | c^\top x \leqslant c^\top a_k\}$ 来切椭球.

实践

- 在大多数线性规划上速度不如单纯形或内点法.
- 主要理论价值：用于证明可多项式求解或构建分离–优化等价.
- 数值稳定性：重复切割同方向会导致“针状”椭球，需注意精度控制.

参考文献

- M. Grötschel et al., Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. 1993.
- 数学规划与运筹学 (11) Khachyian 椭球法. https://zhuanlan.zhihu.com/p/708456821.