相关均衡基础

2024-2025 学年春夏学期计算经济学讨论班

金政羽

clovers2333@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 4 月 25 日

相关均衡引入：斗鸡博弈

在之前的讨论中，博弈参与人的行为都是独立作出的

- 但是，在有的博弈中（例如协调博弈），我们希望有一个仲裁人站出来，告诉参与人应该如何选择策略
- 在现实中的确存在这样的博弈，例如红绿灯

例 (斗鸡博弈（The game of Chicken）)

两个人开车相向而行，如果两个人都不避让，就会发生车祸．如果两个人都避让，那么就会浪费时间．如果一个人避让，另一个人不避让，那么避让的人会被认为是懦夫．这个博弈的收益矩阵如下：

	避让	不避让
避让	6, 6	2, 7
不避让	7, 2	0, 0

相关均衡引入：斗鸡博弈（Cont'd）

例 (斗鸡博弈（The game of Chicken）)

两个人开车相向而行，如果两个人都不避让，就会发生车祸．如果两个人都避让，那么就会浪费时间．如果一个人避让，另一个人不避让，那么避让的人会被认为是懦夫．这个博弈的收益矩阵如下：

	避让	不避让
避让	6, 6	2, 7
不避让	7, 2	0, 0

这个博弈有三个均衡：

1. （避让，不避让）和（不避让，避让），收益分别为 $(2,7)$ 和 $(7,2)$，这就是红绿灯推荐的均衡，没有人会主动偏离
2. 双方都以 2/3 概率选择避让，1/3 概率选择不避让，收益为 $(14/3, 14/3)$

相关均衡引入：斗鸡博弈（Cont'd）

考虑如下机制：一个仲裁人关于要采取的行动给每个参与者一个建议，但仲裁人不告诉每个参与人其他参与人得到的建议．仲裁人以相同的概率在三个行动向量中选择：

	避让	不避让
避让	1/3	1/3
不避让	1/3	0

尽管参与人不知道别人被推荐了什么策略，但推荐的概率分布是公开的．通过抽签的方法在三个行动向量中选择一个之后，仲裁人向行参与人推荐抽到的行动向量的第一个策略，向列参与人推荐第二个策略，例如抽到了（避让，不避让），那么行参与人被推荐避让，列参与人被推荐不避让．

相关均衡引入：斗鸡博弈（Cont'd）

考虑如下机制：一个仲裁人关于要采取的行动给每个参与者一个建议，但仲裁人不告诉每个参与人其他参与人得到的建议．仲裁人以相同的概率在三个行动向量中选择：

	避让	不避让
避让	1/3	1/3
不避让	1/3	0

尽管参与人不知道别人被推荐了什么策略，但推荐的概率分布是公开的．通过抽签的方法在三个行动向量中选择一个之后，仲裁人向行参与人推荐抽到的行动向量的第一个策略，向列参与人推荐第二个策略，例如抽到了（避让，不避让），那么行参与人被推荐避让，列参与人被推荐不避让．

需要注意的是，如果行参与人收到了避让的建议，那么他认为列参与人收到了避让建议的概率应当是条件概率（其它分析同理）

$$\frac{1/3}{1/3+1/3}=1/2$$

相关均衡引入：斗鸡博弈（Cont'd）

现在证明，两个参与人都无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．正如前面分析的，如果行参与人收到了避让的建议，那么他认为列参与人收到了避让和不避让的建议的概率都是 1/2

1. 如果行参与人遵循建议，那么他的收益是 $1/2 \times 6 + 1/2 \times 2 = 4$
2. 如果不遵循建议，那么他的收益是 $1/2 \times 7 + 1/2 \times 0 = 3.5$

因此，行参与人无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．同理，我们可以验证行列参与人在任何推荐下都无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．

相关均衡引入：斗鸡博弈（Cont'd）

现在证明，两个参与人都无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．正如前面分析的，如果行参与人收到了避让的建议，那么他认为列参与人收到了避让和不避让的建议的概率都是 1/2

1. 如果行参与人遵循建议，那么他的收益是 $1/2 \times 6 + 1/2 \times 2 = 4$
2. 如果不遵循建议，那么他的收益是 $1/2 \times 7 + 1/2 \times 0 = 3.5$

因此，行参与人无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．同理，我们可以验证行列参与人在任何推荐下都无法从单方面偏离仲裁人的建议来获益．

因此这一推荐产生了一个均衡（接下来我们会定义），这一均衡下的期望收益是

$$1/3(6,6) + 1/3(2,7) + 1/3(7,2) = (5,5)$$

这位于斗鸡博弈的三个纳什均衡收益的凸包之外（即不能被线性表示），二者的期望收益之和大于三个纳什均衡的期望收益之和，因此对于参与人而言，这一均衡是更好的．

相关均衡的定义

令 $G=(I,(S_i)_{i\in I},(u_i)_{i\in I})$ 为一个策略型博弈，对于集合 $S=S_1\times\cdots\times S_n$ 上的每个概率分布 p，定义博弈 $\Gamma^*(p)$ 如下：

- 仲裁人根据概率分布 p 在 S 上选择一个策略向量
- 对每个参与人 i，仲裁人向参与人 i 推荐 s_i，但不告知其他参与人的推荐 s_{-i}
- 参与人 i 选择一个策略 s_i'，并不一定是推荐的策略
- 参与人 i 的收益是 $u_i(s_1',\cdots,s_n')$

相关均衡的定义

令 $G=(I,(S_i)_{i\in I},(u_i)_{i\in I})$ 为一个策略型博弈，对于集合 $S=S_1\times\cdots\times S_n$ 上的每个概率分布 p，定义博弈 $\Gamma^*(p)$ 如下：

- 仲裁人根据概率分布 p 在 S 上选择一个策略向量
- 对每个参与人 i，仲裁人向参与人 i 推荐 s_i，但不告知其他参与人的推荐 s_{-i}
- 参与人 i 选择一个策略 s_i'，并不一定是推荐的策略
- 参与人 i 的收益是 $u_i(s_1',\cdots,s_n')$

当仲裁人推荐参与人 i 选择 s_i 时，参与人 i 知道其他参与人的推荐是 s_{-i} 的概率为

$$p_i(s_{-i}\mid s_i)=\frac{p(s_i,s_{-i})}{p(s_i)}=\frac{p(s_i,s_{-i})}{\sum\limits_{s_{-i}\in S_{-i}}p(s_i,s_{-i})}$$

相关均衡的定义（Cont’d）

要使得每个参与人接受仲裁人的推荐是一个均衡（即没有人会独自偏离推荐的策略），显然要求为

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_{-i} \mid s_i)u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_{-i} \mid s_i)u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

可以消去 $p_i(s_{-i} \mid s_i)$ 的分母部分，改写为

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

相关均衡的定义（Cont'd）

要使得每个参与人接受仲裁人的推荐是一个均衡（即没有人会独自偏离推荐的策略），显然要求为

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_{-i} \mid s_i)u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_{-i} \mid s_i)u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

可以消去 $p_i(s_{-i} \mid s_i)$ 的分母部分，改写为

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

如果上式对任意的 i 都满足，我们称满足上述条件的概率分布 p 为博弈 Γ^* 的一个相关均衡（**correlated equilibrium**）.

- 注意：相关均衡是一个概率分布，实际上可以认为是仲裁人的一种推荐策略
- 在相关均衡下，参与人的策略选择不再是独立的，联合分布 p 被直接给出

相关均衡的性质

对于每个混合策略纳什均衡 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_n^*)$，我们可以导出一个策略向量集合上的概率分布 p_σ^*：

$$p_\sigma^*(s_1, \cdots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^*(s_i)$$

在纳什均衡 σ^* 下，给定其他参与人的策略向量 σ_{-i}^*，每个参与人以正的概率选择的行动都是给他们带来最大收益的行动（无差异原则），则

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', \sigma_{-i}^*), \forall s_i \in \operatorname{supp}(\sigma_i^*), \forall s_i' \in S_i$$

相关均衡的性质

对于每个混合策略纳什均衡 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \cdots, \sigma_n^*)$，我们可以导出一个策略向量集合上的概率分布 p_σ^*：

$$p_\sigma^*(s_1, \cdots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^*(s_i)$$

在纳什均衡 σ^* 下，给定其他参与人的策略向量 σ_{-i}^*，每个参与人以正的概率选择的行动都是给他们带来最大收益的行动（无差异原则），则

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', \sigma_{-i}^*), \forall s_i \in \text{supp}(\sigma_i^*), \forall s_i' \in S_i$$

将这一表达式展开即可得到

定理

对于每个混合策略纳什均衡 σ^*，概率分布 p_{σ^*} 是一个相关均衡.

1. 由此可见，相关均衡是混合策略纳什均衡的一个扩展
2. 直观：纳什均衡本身就产生了一个大家不会偏离的推荐策略

粗糙相关均衡

粗糙相关均衡（**coarse correlated equilibrium**）是相关均衡的一个扩展，此时参与人只知道自己被推荐策略的概率，而不知道自己被推荐的具体策略，并且不偏离推荐：

$$\sum_{s \in S} p(s) u_i(s) \geqslant \sum_{s \in S} p(s) u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i' \in S_i$$

粗糙相关均衡

粗糙相关均衡（**coarse correlated equilibrium**）是相关均衡的一个扩展，此时参与人只知道自己被推荐策略的概率，而不知道自己被推荐的具体策略，并且不偏离推荐：

$$\sum_{s\in S} p(s)u_i(s) \geqslant \sum_{s\in S} p(s)u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i' \in S_i$$

可通过相关均衡和粗糙相关均衡之间的关联加深理解：相关均衡为

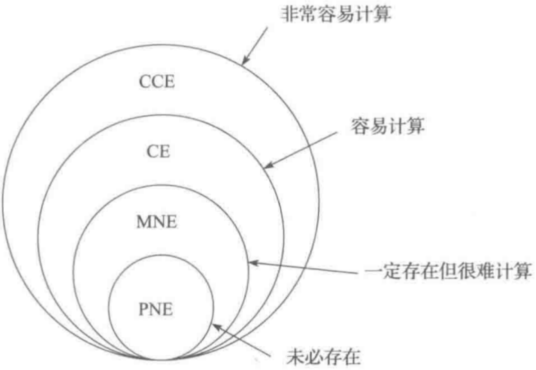
$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i, s_i' \in S_i$$

两边对 s_i 求和，得到

$$\sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i' \in S_i$$

整理后就是相关均衡，并且可以理解什么叫“只知道自己被推荐策略的概率，不知道自己被推荐的具体策略”的含义.

均衡之间的关系



均衡概念的层级结构：纯策略纳什均衡(Pure Nash Equilibria, PNE)、混合策略纳什均衡(Mixed Nash Equilibria, MNE)、相关均衡(Correlated Equilibria, CE)和粗糙相关均衡(Coarse Correlated Equilibria, CCE)

综合的例子

考虑有四个智能体的单元自私路由网络，网络很简单，有一个公共起点 o，公共终点 d，边集 $E=\{0,1,2,3,4,5\}$ 分别表示 6 条平行的 $o-d$ 边，每条边的代价函数为 $c(x)=x$.

综合的例子

考虑有四个智能体的单元自私路由网络，网络很简单，有一个公共起点 o，公共终点 d，边集 $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 分别表示 6 条平行的 $o - d$ 边，每条边的代价函数为 $c(x) = x$.

1. 纯策略纳什均衡：每个智能体选择不同的边，每人代价 1
2. 混合策略纳什均衡：每个智能体以相同的概率选择其中一条边，每人期望代价 3 / 2
3. 相关均衡：一条边上有两个智能体且另外两条边上分别有一个智能体的局势上的均匀分布，每人期望代价 3 / 2
4. 粗糙相关均衡：和相关均衡类似，但智能体选边结果只能是 $\{0, 2, 4\}$ 或 $\{1, 3, 5\}$，那么在两个边集上的均匀分布就是一个粗糙相关均衡，每人期望代价 3 / 2. 注意这不是相关均衡，因为智能体可以通过改变到旁边的边来降低代价到 1

相关均衡的等价条件

定理

一个策略集 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 上的概率分布 p 是一个相关均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和任意的交换函数（**switching function**）$\delta_i : S_i \to S_i$，有

$$E_{s\sim p}[u_i(s)] \geq E_{s\sim p}[u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})]$$

(注意: δ_i 只依赖于 s_i)

相关均衡的等价条件

定理

一个策略集 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 上的概率分布 p 是一个相关均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和任意的交换函数（**switching function**）$\delta_i : S_i \to S_i$，有

$$E_{s\sim p}[u_i(s)] \geq E_{s\sim p}[u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})]$$

(注意: δ_i 只依赖于 s_i)

证明

将期望展开，即证明 $\forall i \in I, \forall \delta_i : S_i \to S_i$，有

$$\sum_{s\in S} p(s)u_i(s) \geq \sum_{s\in S} p(s)u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})$$

相关均衡的等价条件（Cont'd）

证明（续）

($\Rightarrow$) 假设 p 是一个相关均衡，即 $\forall i \in I, \forall s_i, s_i' \in S_i$，有

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i', s_{-i})$$

对于任意 $\delta_i : S_i \to S_i$，令 $s_i' = \delta_i(s_i)$ (对每个 s_i 应用相关均衡定义中的不等式)，则 $\forall s_i \in S_i$，有

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})$$

两边同时对 s_i 求和即可得到题目要求的不等式.

相关均衡的等价条件（Cont’d）

证明（续）

$(\Leftarrow)$ 反证法．假设 p 不是相关均衡，则存在参与人 i 和策略 $s_i^*, s_i' \in S_i$ 使得

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i})u_i(s_i^*, s_{-i}) < \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i})$$

构造交换函数 $\delta_i : S_i \to S_i$ 如下：

$$\delta_i(s_j) = \begin{cases} s_i' & \text{if } s_j = s_i^* \\ s_j & \text{if } s_j \neq s_i^* \end{cases}$$

即 δ_i 仅将 s_i^* 映射到 s_i'，其余策略保持不变．根据条件，我们有 $\sum_{s\in S} p(s)u_i(s) \geq \sum_{s\in S} p(s)u_i(\delta_i(s_i), s_{-i})$，展开为：

$$\sum_{s_j\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i})u_i(s_j, s_{-i}) \geq \sum_{s_j\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i})u_i(\delta_i(s_j), s_{-i})$$

相关均衡的等价条件（Cont'd）

证明（续）

将右侧按 $s_j = s_i^*$ 和 $s_j \neq s_i^*$ 分开：

$$RHS = \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i}) u_i(\delta_i(s_i^*), s_{-i}) + \sum_{s_j \neq s_i^*} \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i}) u_i(\delta_i(s_j), s_{-i})$$

$$= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i}) u_i(s_i', s_{-i}) + \sum_{s_j \neq s_i^*} \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i}) u_i(s_j, s_{-i})$$

代入不等式 $\sum_{s\in S} p(s) u_i(s) \geq RHS$：

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i}) u_i(s_i^*, s_{-i}) + \sum_{s_j \neq s_i^*} \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i}) u_i(s_j, s_{-i})$$

$$\geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i}) u_i(s_i', s_{-i}) + \sum_{s_j \neq s_i^*} \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_j, s_{-i}) u_i(s_j, s_{-i})$$

相关均衡的等价条件（Cont’d）

证明（续）

消去相同项得到:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i})u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i^*, s_{-i})u_i(s_i', s_{-i})$$

这与我们最初的假设（存在 s_i^*, s_i' 使得不等式反向）矛盾. 因此假设不成立，p 是一个相关均衡.

相关均衡的等价条件（Cont'd）

现在我们从“交换函数”的角度再来看相关均衡和粗糙相关均衡，可以发现粗糙相关均衡实则是在交换函数上加了一个限制——对于所有的 $s_i \in S_i$，$\delta_i(s_i)$ 必须取同一个值.

从这个角度来说，相关均衡的“交换函数”能覆盖的情况更多，所以对均衡的限制也就更强.