Fair Division(1)

2024-2025 学年春夏学期计算经济学讨论班

郑涵文

zhwen@zju.edu.cn

2025 年 2 月 28 日

Fair Division

切蛋糕问题

诚实的比例公平机制的不存在性

松弛诚实性

风险厌恶下的诚实无嫉妒机制

总结 & 展望

Fair Division 引入

Fair Division 是研究如何把一系列可分的资源分配 (Divison) 给若干个人，并且使得每个人都认为自己得到了公平 (Fair) 的份额的问题.

- 每个人都有自己的估值函数，不同的人对同一个资源的估值通常是不同的.
  - 例如，两个人分一个蛋糕，蛋糕一半是巧克力味的，一半是草莓味的．第一个人非常喜欢吃巧克力但极度讨厌草莓，第二个人则恰好相反．那么即使不需要任何严谨的推导我们也能知道在现实中两个人肯定会达成一致：第一个人分走巧克力部分，第二个人分走草莓部分.
- 诚实性 (Truthfulness)．参与者可以通过谎报自己的估值函数来获取可能的利益.
- 公平性 (Fairness).
  - Proportional fairness (比例公平)：假设总共有 n 个人参与分配，如果每个人分配到的部分的估值都大于等于他对所有资源的估值之和的 $\frac{1}{n}$，则称这种分配是比例公平的.
  - Envy-Free (无嫉妒)：如果每个人都认为自己分配到的部分比其他人分配到的部分好，那么这种分配是无嫉妒的.
  - 容易证明，无嫉妒分配一定是比例公平的，但反过来不一定.

切蛋糕问题 (Cake-Cutting Problem)

切蛋糕问题是一类 Fair Division 问题．它的定义很直观：有一块蛋糕，蛋糕的不同部分具有不同的价值（可以感性理解为：蛋糕每部分的馅都不一样，而每个人的口味不同因此有不同估值）．我们需要把这块蛋糕切分给 n 个人，使得每个人都认为自己得到了公平的份额．

形式化定义

- 使用区间 $[0,1]$ 表示要被切分的蛋糕，不同参与者对这个区间的不同部分有自己的估值．
- 参与者 i 有估值密度函数 $f_i(x):[0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，参与者 i 对一个区间 $X\subseteq[0,1]$ 的估值为 $v_i(X)=\int_X f_i(x)\,\mathrm{d}x$.

机制设计

研究者在切蛋糕问题上致力于提出各种分配机制，使得分配满足公平性、诚实性等等性质.

形式化定义

- 一个分配机制是一个函数 M，它接受估值密度函数 $F=(f_1,\dots,f_n)$ 作为输入，并输出一个分配方案 $(A_1,\dots,A_n)$，满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i\subseteq[0,1]$，并且 A_i 之间两两交集为空. 如果 $\bigcup_{i=1}^n A_i=[0,1]$，我们称这个分配是**完全的**. 对于给定的 $M(F)=(A_1,\dots,A_n)$，记 $M_i(F)=A_i$ 表示 i 在输入 F 下的分配.
- 分配机制不具有**鉴别**估值函数是否真实的能力，参与者可以谎报自己的估值函数给分配机制，以获取可能的利益.

公平性和诚实性

比例公平机制

如果对于任意输入 F，分配机制 M 保证分配的 (A_i) 满足

$$\forall i:\ \ v_i(A_i) \geq \frac{1}{n} v_i([0,1])$$

即分配是满足比例公平的，则称 M 是一个比例公平机制.

诚实机制

如果对于每个参与人来说，报告自己的真实估值函数给机制是**占优策略**，则称这个机制是诚实的. 即，对于任意 $i \in [n]$ 和任意 $(f_1, \ldots, f_n), f_i'$，有

$$v_i(M_i(f_1, \ldots, f_n)) \geq v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, f_n))$$

公平性和诚实性

无嫉妒机制

如果对于任意输入 F，分配机制 M 保证分配的 (A_i) 满足

$$\forall i, j: \quad v_i(A_i) \geq v_i(A_j)$$

即分配是满足无嫉妒的（任何人都无法通过和别人交换分配来提升得到的价值），则称 M 是一个无嫉妒机制.

若干无嫉妒机制

两个参与者

我切你选：第一个参与者按照自己的估值把蛋糕切成价值相等的两份，第二个参与者按自己的估值选更好的那份，第一个参与者拿剩下的那份.

三个参与者

- 走刀法：需要一个裁判，从左向右走刀，三人拿着刀站在裁判右边，保持在平分右边蛋糕的位置（按各自标准）. 一旦三人中有一个喊「切」，此人获得裁判左边的蛋糕. 然后三人中位于中间位置的那位（B）把刀切下. 没蛋糕的两位中，离裁判近的那位获得中间那块，远的那位获得右边那块.
- Selfridge-Conway 算法.

一般情况

对于一般的 n 个参与者的情况，在 FOCS 2016 上 Aziz 和 Mackenzie 提出了一个离散有界的无嫉妒多人分配机制，并证明了该机制切蛋糕次数的上界最多是 $n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}}$.

是否存在诚实的无嫉妒机制?

定理

不存在诚实的比例公平机制，即使是在加了这些限制条件下：

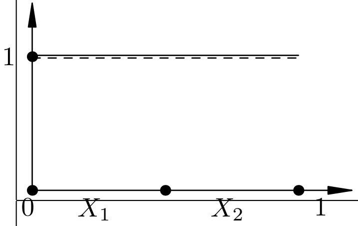
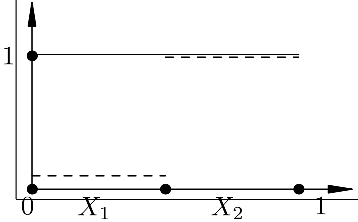
1. 只有两个参与者；
2. 每个参与者的估值密度函数都是分段常数；
3. 每个参与者都是饥饿的：即对于任意 $x \in [0,1]$ 都有 $f_i(x) > 0$；
4. 机制给出的分配不必是完全的.

需要注意的是，由于无嫉妒能推出比例公平，因此这个定理也说明了不存在诚实的无嫉妒机制.

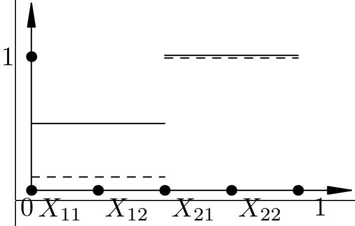
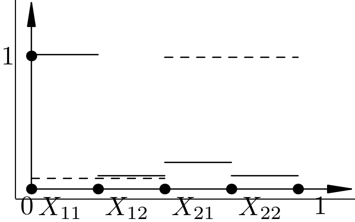
证明思路

使用反证法，先假设存在诚实的比例公平机制，构造一些估值函数的例子，使得根据诚实且比例公平的性质，这些例子的分配均是唯一的．最后再根据这些例子的特性，构造另一组估值函数以产生矛盾．

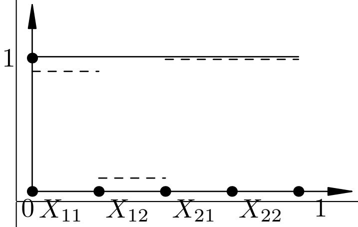
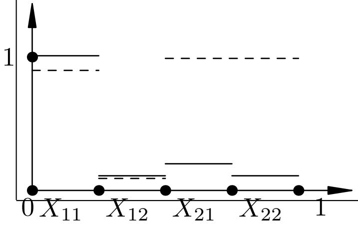
实例构造

<table>
<tr><th>Instance</th><th>Allocation</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$M(F^{(1)}) = (X_1, X_2)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$M(F^{(2)}) = (X_1, X_2)$</td></tr>
</table>

实例构造

Instance	Allocation
	$M(F^{(3)}) = (X_{11} \cup X_{21}, X_{12} \cup X_{22})$
	$M(F^{(4)}) = (X_{11} \cup X_{21}, X_{12} \cup X_{22})$

实例构造

Instance	Allocation
	$M(F^{(5)}) = (X_1, X_2)$
	

实例构造

实例 1

$F^{(1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)})$, where $f_1^{(1)}(x) = 1$ and $f_2^{(1)}(x) = 1$ for $x \in [0, 1]$.

容易知道，为了满足比例公平，肯定是每个人都切一半长度走，不失一般性地就假设第一个人切了前半部分，第二个人切了后半部分，我们记 $X_1 = [0, 1/2], X_2 = [1/2, 1]$.

实例构造

实例 2

$F^{(2)} = (f_1^{(2)}, f_2^{(2)})$, where $f_1^{(2)}(x) = 1$ for $x \in [0,1]$ and

$$f_2^{(2)}(x) = \begin{cases} \varepsilon & x \in X_1 \\ 1 & x \in X_2 \end{cases} .$$

此处的 ε 是一个足够小的正数.

分析这个实例，第一个人根据比例要求至少分走一半；第二个人根据真实性要求，如果按照第一个例子的估值函数谎报，能够得到 1/2 的价值，因此为保证真实性，机制输出的结果至少要给第二个人 1/2 的价值．结合这两个观察就能得到唯一的分配方案，即第一个人分前半部分，第二个人分后半部分．

实例构造

实例 3

$F^{(3)} = (f_1^{(3)}, f_2^{(3)})$, where

$$f_1^{(3)}(x) = \begin{cases} 0.5 & x \in X_1 \\ 1 & x \in X_2 \end{cases} \quad \text{and} \quad f_2^{(3)}(x) = \begin{cases} \varepsilon & x \in X_1 \\ 1 & x \in X_2 \end{cases}.$$

这个例子的分析略复杂．

首先，第一个人不能分走超过一半长度的蛋糕．这是因为，如果在第三个例子中第一个人能分走超过一半的蛋糕，那么第二个例子中的第一个人就能通过谎报第三个例子中的估值函数来获得超过一半长度的蛋糕，从而获得大于 $\frac{1}{2}$ 的价值，与我们已经得到的第二个例子的结果矛盾．

其次，当第一个人分到 X_1 和 X_2 各一半的时候刚好满足比例要求，根据这个观察我们能够断言：第一个人**至少**要分 X_2 的一半．如果比一半少了 x 的长度，需要用 X_1 以比一半多 2x 的长度来弥补，**以满足比例要求**．但是，这样总长度就超过一半了，和第一个观察矛盾．

实例构造

第三个观察，第一个人也不能分走**超过** X_2 的一半，否则第二个人满足不了比例要求．
所以根据上面的观察，第一个人一定刚好分到了 X_2 的一半．与此同时为满足比例要求，第二个人一定要拿走 X_2 的剩下一半．
然后，根据比例性和拿走总长度不超过一半，第一个人一定拿走 X_1 的一半；第二个人为满足比例要求一定拿走剩下一半．
所以这个实例的分配方案在真实的比例公平的机制下也是唯一的．我们把 X_1 分的两半分别记为 X_{11} 和 X_{12}，X_2 分的两半分别记为 X_{21} 和 X_{22}．不失一般性地让第一个人拿 $X_{11} \cup X_{21}$，第二个人拿 $X_{12} \cup X_{22}$．

实例构造

实例 4

$F^{(4)} = (f_1^{(4)}, f_2^{(4)})$, where

$$f_1^{(4)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_{11} \\ \varepsilon & x \in X_{12} \\ 2\varepsilon & x \in X_{21} \\ \varepsilon & x \in X_{22} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_2^{(4)}(x) = \begin{cases} \varepsilon & x \in X_1 \\ 1 & x \in X_2 \end{cases}.$$

首先，根据和第三个实例一样的理由，第一个人不能拿超过一半长度的蛋糕.
其次，如果第一个人按照上个例子中第一个人的估值函数进行谎报，可以收获 $\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2}$ 的价值，所以在非谎报情况下，机制至少要给第一个人分配这么多价值才能保证诚实性.
结合这两个观察，第一个人的分配一定是 $X_{11} \cup X_{21}$，对于第二个人要满足比例性，所以他的分配一定是 $X_{12} \cup X_{22}$.

实例构造

实例 5

$F^{(5)} = (f_1^{(5)}, f_2^{(5)})$, where $f_1^{(5)}(x) = 1$ for $x \in [0,1]$ and

$$f_2^{(5)}(x) = \begin{cases} 1-\varepsilon & x \in X_{11} \\ \varepsilon & x \in X_{12} \\ 1 & x \in X_2 \end{cases}.$$

为满足比例性第一个人要分到不少于一半长度的蛋糕，所以第二个人最多分到一半长度的蛋糕.
如果第二个人按照第二个实例进行谎报，将会被分配到 X_2，即 $\frac{1}{2}$ 的价值．所以在非谎报情况下，机制至少要给第二个人分配这么多价值．结合长度条件，第二个人的分配一定是 X_2.
因此第一个人的分配一定是 X_1.

实例构造

实例 6

$F^{(6)} = (f_1^{(6)}, f_2^{(6)})$, where

$$f_1^{(6)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_{11} \\ \varepsilon & x \in X_{12} \\ 2\varepsilon & x \in X_{21} \\ \varepsilon & x \in X_{22} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_2^{(6)}(x) = \begin{cases} 1-\varepsilon & x \in X_{11} \\ \varepsilon & x \in X_{12} \\ 1 & x \in X_2 \end{cases}.$$

这个例子将会导出矛盾.

导出矛盾

引理 1

$|M_2(F^{(6)}) \cap X_2| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon.$

证明

假设引理不成立：$|M_2(F^{(6)}) \cap X_2| > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$. 考虑实例 4，它的分配结果是 $M_2(F^{(4)}) = X_{12} \cup X_{22}$, 并且第二个人能获得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$ 的价值．如果说 $|M_2(F^{(6)}) \cap X_2| > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$，那么实例 4 中的第二个人就会谎报以获得更多的价值，这与实例 4 的结果矛盾，因此引理成立．

导出矛盾

引理 2

$v_1(M_1(F^{(6)})) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$ with respect to $f_1^{(6)}$.

证明

这个证明很容易．因为如果第一个人按照实例 5 的估值函数谎报能够得到 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$ 的价值，所以在真实情况下机制至少要给第一个人这么多价值．

导出矛盾

引理 3

$v_2(M_2(F^{(6)})) \geq \frac{3}{8}$ with respect to $f_2^{(6)}$.

证明

我们有 $v_2([0,1]) = \frac{1}{4}((1-\varepsilon)+\varepsilon) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$. 根据比例性这个引理成立.

导出矛盾

从我们的假设出发，能够推出上述三个引理．但是接下来我们说明这三个引理不会同时成立．首先从一个直观的角度进行的感性理解：在 $F^{(6)}$，第二个人在 X_{11}, X_{21} and X_{22} 上有着 1 或者非常接近 1 的估值，并且在 X_{12} 有着可以忽略的估值．引理 1 说明，第二个人最多被分配到一半（再加上微乎其微的 $\frac{1}{2}\varepsilon$）的 $X_{21} \cup X_{22}$．为了保证比例性（引理 3），它需要再分到 X_{11} 的一半左右．

另一方面，引理 2 表明了几乎全部的 X_{11} 都需要分给第一个人．因此出现了矛盾．

形式化地讲，引理 1 表明 $v_2(M_2(F^{(6)}) \cap X_2) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$．引理 3 表明 $v_2(M_2(F^{(6)}) \cap X_1) \geq \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\varepsilon$．即使我们把 X_{12} 全部分给第二个人 (which is worth $\frac{1}{4}\varepsilon$)，仍然有

$$\left|M_2(F^{(6)}) \cap X_{11}\right| \geq \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1-4\varepsilon}{8-8\varepsilon}.$$

因此对第一个人有

$$\left|M_1(F^{(6)}) \cap X_{11}\right| \leq \frac{1}{4} - \frac{1-4\varepsilon}{8-8\varepsilon} = \frac{1+2\varepsilon}{8-8\varepsilon}.$$

导出矛盾

为了找到 $v_1(M_1(F^{(6)}))$ 的上界，假设第一个人被分到了全部的 X_{12}, X_{21} 和 X_{22}. 即使如此仍有上界：

$$v_1(M_1(F^{(6)})) \le \frac{1+2\varepsilon}{8-8\varepsilon} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon + \frac{1}{4} \cdot 2\varepsilon + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon = \frac{1+2\varepsilon}{8-8\varepsilon} + \varepsilon.$$

让 $\varepsilon \to 0$，可以得到极限是 $\frac{1}{8}$. 因此对于某个足够小的 ε 能够得到 $v_1(M_1(F^{(6)})) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$，因此引理 2 不能被满足，矛盾.

这就证明了**在给定的条件下不存在诚实的比例公平机制**.

松弛诚实性

如果一个机制要满足诚实且比例公平，那么它要对所有的输入都能做到诚实性和比例公平性．当我们对输入进行一些限制的时候，这个机制要满足的**输入空间就变小了**，就**更可能**做到诚实性和比例公平性．例如在前面提到的，对输入进行了以下限制

1. 只有两个参与者；
2. 每个参与者的估值密度函数都是分段常数；
3. 每个参与者都是饥饿的：即对于任意 $x \in [0, 1]$ 都有 $f_i(x) > 0$；

同时对输出放宽了限制：分配可以是不完全的．

但即使是这样，我们也证明了在这些条件下不存在诚实的比例公平机制．为了找到一个诚实的比例公平机制，我们需要进一步对输入进行限制，论文提出了一个新的限制条件：**单调性**．将原有的限制条件再加上估值密度函数具有单调性的限制，就能找到一个诚实的**无嫉妒**机制．

但是从另一个方面来说，我们同样可以对诚实性这一点进行松弛，让它不那么严格，也就是更弱的诚实性．

近似诚实 & 纳什均衡

一个自然的松弛诚实性的想法是加入近似比．在近似诚实中，一个人不会为了小于 $\alpha(\alpha > 1)$ 倍的说实话得到的价值而谎报．但是这个角度在算法和理论层面的意义远大于实际应用的意义．

另一个角度是纳什均衡，因为我们知道占优策略（这里是每个人的策略都是占优策略）是强于纳什均衡的，如果把占优诚实松弛到纳什均衡诚实（即设计的机制使得说实话得到的分配结果是纳什均衡）是否会得到更好的结果呢？可惜的是，在我们研究的这个问题下，纳什均衡等价于占优策略．证明在此处略去，思路就是通过证明非占优推出非纳什均衡，从而得到纳什均衡推出占优．

风险厌恶下的诚实

文章提出了两种风险厌恶下的诚实性：

1. 普通风险厌恶诚实（risk-averse truthful）：A mechanism M is *risk-averse truthful* if, for each agent i with value density function f_i and for any f_i', either one of the following holds:
   1. for any $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n$,
   $$v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n)) \geq v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_n));$$
   2. there exist $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n$ such that
   $$v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_n)) < v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n)).$$
2. 比例公平风险厌恶诚实（proportionally risk-averse truthful）：A mechanism M is *proportionally risk-averse truthful* if
   1. M is proportional, and
   2. for each agent i with value density function f_i and for any f_i', either one of the following holds:
      1. for any $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n$,
      $$v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \ldots, f_n)) \geq v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_n));$$
      2. there exist $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n$ such that
      $$v_i(M_i(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_n)) < \frac{1}{n} v_i([0, 1]).$$

风险厌恶下的诚实

换言之，普通风险厌恶诚实（risk-averse truthful，下称 RAT）就是说一个人不会在存在风险的时候谎报．如果谎报可能给他带来损失，那么就一定不谎报．从反面来看，如果不满足 RAT，那么一定存在一对 f_i, f_i' 使得将 f_i 谎报为 f_i' 有时能带来收益并且永远没有损失．
比例公平风险厌恶诚实（proportionally risk-averse truthful，下称 PRAT）的要求比 RAT 更严格，RAT 只要存在可能的损失就不会谎报，而 PRAT 在面对可能的微小损失下还是会谎报，只有在谎报可能给他带来较大损失的时候（没办法满足比例性了）才不会谎报．换句话说，PRAT 下人们更容易说谎．

简单的无嫉妒机制算法

首先我们仍然在所有参与者的估值密度函数是分段常数函数条件下进行研究．算法首先从所有参与者那里收集所有不连续点（把每个人的估值函数的不连续点放在一个集合中），然后对这些连续点排序，这些不连续点把蛋糕分隔开．在分隔开的每个单独小区间上，容易发现每个人的估值在这个小区间上都是常数．我们把每个小区间都平分给所有人，容易得到这是无嫉妒的并且最终的分配 $(A_1, \ldots, A_n)$ 满足 $v_i(A_j) = \frac{1}{n} v_i([0,1])$（我们称满足这一性质的分配为**完美分配**）．算法具体描述如下：

Algorithm 1 A simple envy-free cake cutting algorithm

1: let X_i be the set of all points of discontinuity for f_i
2: let $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$
3: let $X = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ be sorted by ascending order, and let $x_0 = 0, x_m = 1$
4: initialize $A_i = \emptyset$ for each $i = 1, \ldots, n$
5: **for** each $j = 0, 1, \ldots, m-1$:
6: for each agent $i = 1, \ldots, n$: $A_i \leftarrow A_i \cup \left[x_j + \frac{i-1}{n}(x_{j+1} - x_j), x_j + \frac{i}{n}(x_{j+1} - x_j)\right)$;
7: **endfor**
8: **return** allocation $(A_1, \ldots, A_n)$

并非 RAT

令人遗憾的是，前面的算法不是 RAT 的．证明思路就是直接地构造一组 f_i, f'_i 使得谎报有时带来收益并永远不会带来风险．

证明

Consider f_1 such that $f_1(x) = 1$ for $x \in [0, \frac{1}{n})$ and $f_1(x) = 0.5$ for $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, and consider $f'_1(x) = 1$ for $x \in [0, 1]$. Let M be the mechanism. We aim to show that misreporting f_1 to f'_1 is sometimes more beneficial and always no harm.

First, consider $f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 1$ for $x \in [0, 1]$. If agent 1 truthfully reports f_1, (s)he will receive $[0, \frac{1}{n^2}) \cup [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2})$, which is worth $\frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{2n^2}$. If agent 1 reports f'_1, the mechanism will see n uniform functions, and allocation $[0, \frac{1}{n})$ to agent 1, which is worth $\frac{1}{n}$, which is more than $\frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{2n^2}$. 这说明了存在一组 $f_2, \ldots, f_n$ 使得谎报是有收益的．

Then, consider any $f_2, \ldots, f_n$. Suppose agent 1 reports f'_1. Let X be defined in Step 2 and 3 of the mechanism with respect to $f'_1, f_2, \ldots, f_n$. Agent 1 always receives the leftmost $1/n$ fraction of each $[x_j, x_{j+1})$. Since f_1 is monotonically decreasing, this is worth at least $1/n$ of $v([x_j, x_{j+1}))$, and agent 1 receives at least his/her proportional share overall. On the other hand, if agent 1 truthfully reports f_1, (s)he will always receive exactly his/her proportional share, which is weakly less than what (s)he would receive by reporting f'_1. 这说明谎报不会亏．

PRAT 算法

我们证明了第一个算法不是 RAT 的．究其原因，我们发现每个人分配到小区间的哪个部分只和它自己的编号有关，第一个人就一定分到第一块．这种确定性的、可预测的分配使得可以通过谎报来获得自己更想要的部分．如果机制是随机分配的，那么这个问题迎刃而解．但是引入随机性通常是不太能被接受的，因为在现实意义下很难找到一个所有人都认可的、真实随机的随机源．
但是受此启发，我们可以让每个人的分配次序不仅和自己的编号有关，还和当前分配的区间编号有关．通常来说每个人都只知道自己的真实估值而不知道别人的，因此就不知道蛋糕最后会被分成多少块，也就无法预测在某个区间上自己会分到哪个部分，有效避免了参与者在自己想要的区间上疯狂攫取利益的可能性．

RAT 算法

算法的具体描述如下：

Algorithm 2 A risk-averse truthful envy-free cake cutting mechanism

1: let X_i be the set of all points of discontinuity for f_i
2: let $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$
3: let $X = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ be sorted by ascending order, and let $x_0 = 0, x_m = 1$
4: initialize $A_i = \emptyset$ for each $i = 1, \ldots, n$
5: **for** each $j = 0, 1, \ldots, m-1$:
6: for each agent i: $A_i \leftarrow A_i \cup \left[x_j + \frac{i+j-1 \mod n}{n}(x_{j+1} - x_j), x_j + \frac{(i+j-1 \mod n)+1}{n}(x_{j+1} - x_j)\right)$;
7: **endfor**
8: **return** allocation $(A_1, \ldots, A_n)$

RAT 算法

我们有如下定理：

定理

算法 2 是 PRAT 的无嫉妒算法.

证明

无嫉妒是显然的. 因为这仍然是一个完美分配，只不过分配顺序打乱了. 无嫉妒能推出比例公平，所以只需要证明 PRAT 的两个条件对于任意的 f_i, f_i' 一定成立至少其一即可.
不失一般性地，我们以参与人 1 为例. 记 f_1, f_1' 分别为参与人 1 的真实估值和谎报估值，记 X_1, X_1' 分别为 f_1, f_1' 的不连续点.

1. 如果 $X_1 \subseteq X_1'$，那么参与人 1 仍然得到 $\frac{1}{n}v_1([0,1])$ 的价值，因为 X_1' 只是把小区间分的更小了. 这就满足了第一个条件，即说谎永远无法带来收益.
2. 如果 $X_1 \not\subseteq X_1'$，那么取一个 $t \in X_1 \setminus X_1'$. 不失一般性假设 $\lim_{x\to t^-} f(x) < \lim_{x\to t^+} f(x)$. 取一个足够小的 ε 使得在 $[t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon]$ 不存在 $X_1 \cup X_1' \setminus \{t\}$ 中的点.

RAT 算法

证明（续）

- 我们构造出一组 $f_2,\ldots,f_n$ 使得 1) $\bigcup_{i=2}^n X_i$ 包含 $X_1 \cup X_1' \cup \{t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon\} \setminus \{t\}$, 2) $\bigcup_{i=2}^n X_i$ 与区间 $(t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon)$ 没有交集, 并且 3) $t-\varepsilon$ 是从左到右的编号为 j 的点，并且 j 是 n 的倍数.
- 可以发现这样的构造只影响了 t 附近的区间，而对其他 X_1 原有的区间没有影响（无非是又被划分成更小的区间了，但是没有影响）. 对于 t 附近的区间，可以发现现在的构造使得在谎报 f_1 的时候，t 这个点消失了，取而代之的是 $t-\varepsilon$ 和 $t+(n-1)\varepsilon$ 这两个点以及它们构成的区间 $[t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon)$. 根据我们构造时的条件 j 是 n 的倍数，对于参与人 1 说自己的编号 i 为 1，所以它在 $[t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon)$ 区间上分配到的是第一块，即区间 $[t-\varepsilon, t)$. 而根据前面的不失一般性的假设，有 $\lim\limits_{x\to t^-} f(x) < \lim\limits_{x\to t^+} f(x)$，说明对于参与者 1 来说 $[t-\varepsilon, t)$ 上得到的价值是小于 $\frac{1}{n}v_1([t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon))$ 的（因为 ε 可以足够小）.
- 对于剩下的 $[0,1] \setminus [t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon)$ 部分，根据前面的分析能知道参与者 1 还是恰好得到 $\frac{1}{n}v_1([0,1] \setminus [t-\varepsilon, t+(n-1)\varepsilon))$ 的价值. 因此获得的总价值是小于 $\frac{1}{n}v_1([0,1])$ 的. 这就满足了第二个条件，即说谎可能会带来损失，并且损失导致无法满足比例性.

连续分配的 PRAT 算法

在前面的算法中，我们把整个大区间分成许多小区间，对这些小区间进行平均分配，每个人得到的都是一堆不连续的小区间的并集．有没有使得每个人拿到的都是连续的一整个区间的 RAT/PRAT 算法呢?

走刀法

走刀法可以推广到 n 个人的形式．记 $a_i = \frac{1}{n}v_i([0,1])$ 为参与者 i 的比例份额．算法记录 x_i 表示对于参与者 i，$[0, x_i)$ 刚好价值 a_i．随后，算法在 $x_1, \ldots, x_n$ 中找出最小的 x_{i^*}，并把 $[0, x_{i^*})$ 分给参与者 i^*．然后对剩下 $n-1$ 个参与者和剩下的蛋糕 $[x_{i^*}, 1]$ 重复前面的过程直到剩下最后一个人．一个值得注意的观察是，除了最后一个人，每个人拿到的价值刚好是自己的比例份额，但是最后一个人可能比这个多．

定理

走刀法不是 RAT 的．

连续分配的 PRAT 算法

我们提出一个能够给出连续分配的 PRAT 算法．算法的具体描述如下：

Algorithm 3 A proportionally risk-averse truthful cake cutting mechanism with connected pieces

1: for each f_i, find the smallest $x_1^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}$ such that $\int_{x_j^{(i)}}^{x_{j+1}^{(i)}} f_i(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f_i(x)\,dx$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-1$, where $x_0^{(i)} = 0$ and $x_n^{(i)} = 1$
2: $c_0 \leftarrow 0$
3: Unallocated $\leftarrow \{1, \ldots, n\}$ // the set of agents who have not been allocated
4: **for** each $j = 1, \ldots, n-1$:
5: $\quad i_j \leftarrow \arg\min_{i \in \text{Unallocated}}\{x_j^{(i)}\}$
6: $\quad c_j \leftarrow x_j^{(i_j)}$
7: $\quad$allocate $[c_{j-1}, c_j)$ to agent i_j
8: $\quad$Unallocated $\leftarrow$ Unallocated $\setminus \{i_j\}$
9: **endfor**
10: allocate the remaining unallocated interval to the one remaining agent in Unallocated.

连续分配的 PRAT 算法

这个算法大致在讲的是：首先对于每个人，都按照自己的估值把蛋糕分成连续的 n 份，每份价值都是 $\frac{1}{n}v_i([0,1])$．把 $n-1$ 个分割点记录下来，为 $x_1^{(i)},\ldots,x_{n-1}^{(i)}$，下标表示这是第几块的分割点，上标表示这是第几个人的分割点．为了完整性让 $x_0^{(i)}=0, x_n^{(i)}=1$．
正式分割前，让 $c_0=0$ 表示从 0 的位置开始切，用 Unallocated 集合表示还未被分配的参与者，初始为全集．
从左到右进行分配，每次分配一块．假设现在在分配从左到右的第 j 块，那么就选择 Unallocated 集合中最小的 $x_j^{(i)}$ 对应的 i_j，并切在 $c_j=x_j^{(i_j)}$ 处，把 $[c_{j-1},c_j)$ 分配给 i_j，最后把 i_j 移出 Unallocated 集合．最后剩下的那个人就拿走剩下的那块．
可以发现这个算法在分配第一块的时候是和走刀法一模一样的，但是在后面的分配中，$x_j^{(i)}$ 是根据整个 $[0,1]$ 区间已经计算好的，而不是像走刀法每次都要计算切 $\frac{1}{n}$ 需要多少长度．而且，这个算法某种程度上比走刀法公平，因为只有一个人恰好拿到比例份额，其他人都有机会比自己的比例份额多（因为对于每个 j 都有 $[x_{j-1}^{(i_j)},x_j^{(i_j)})\subseteq[c_{j-1},c_j)$）．

连续分配的 PRAT 算法

定理

算法 3 是完全的、比例公平的，并且给出的都是连续分配.

定理

算法 3 对于饥饿的参与者是 PRAT 的.

讲了什么？

- Fair Divsion：主要研究了蛋糕切分问题；
  - 诚实性、比例公平性、无嫉妒性；
- 即使在给定的某些特殊限制下，仍然不存在诚实的比例公平机制；
- 对诚实性进行松弛————风险厌恶下的诚实性
  - RAT、PRAT；

展望

论文留下了一些 Open problem：

1. 考虑对比例公平性进行松弛，即近似比例公平．是否能找到一个常数 α 使得存在一个诚实的，α-近似比例公平的机制？
   - 作者在论文中证明了 0.974031-近似比例公平的诚实机制不存在．
2. 是否存在一个真实机制使得机制永远只给参与人分配那些他们估值为正的部分？
   - 显然当饥饿的时候这个命题肯定成立，但是一般情况值得研究．
3. 是否存在一个固定的 $n > 2$ 使得存在一个诚实的比例公平机制？
   - 作者证明了 $n = 2$ 的情况是不存在的，并猜想这个结果可能适用于任意的 $n > 2$，但是并没有证明．