ZJU 2024–2025 学年春夏学期

计算经济学讨论班

Lec 1: 零和博弈与极小极大定理

吴一航 yhwu_is@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

CONTENT

目录

从囚徒困境出发

从囚徒困境出发，首先回顾博弈论中的几个基本概念。

一个犯罪团伙的两名成员 1 和 2 被捕，他们在两个独立的房间里接受审问，他们之间无法通信。他们可以选择承认或不承认罪行，对应的结果如下：

罪犯 2

罪犯 1		不承认	承认
	不承认	$-1, -1$	$-15, 0$
	承认	$0, -15$	$-5, -5$

如何规范地表达这一博弈？如何求解这一博弈？

博弈的表达方式

如何规范地表达囚徒困境?

定义

博弈可被表达为一个三元组 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$，其中

- **参与人（player）**集合：N，参与人记为 $i \in N$，
- 每个参与者可以选择的**策略（strategy）**集合：S_i，
- **报酬函数（payoff function）**：$u_i : S_1 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$。

例如，在囚徒困境中：

- $N = \{\text{罪犯 } 1, \text{罪犯 } 2\}$，
- $S_1 = S_2 = \{\text{承认}, \text{不承认}\}$，
- u_1 和 u_2 可以通过上面的表格给出，如 $u_1(\text{承认}, \text{承认}) = -5$。

博弈的解概念

如何求解囚徒困境?

定义

博弈的解或**解概念（solution concept）**是对于一个博弈的一种预期结果，通常是一个策略组合，即参与人的行动选择，或收益的分配结果。

罪犯 2

罪犯 1		不承认	承认
	不承认	$-1, -1$	$-15, 0$
	承认	$0, -15$	$-5, -5$

- 参与人 1 发现，无论对方选择承认或不承认，自己选择承认都会比不承认效用更高
- 参与人 2 发现，无论对方选择承认或不承认，自己选择承认都会比不承认效用更高

（严格）占优策略

称不承认是一个**严格劣策略（strictly dominated strategy）**，即无论对方选择什么，自己选择这个策略都是最差的:

定义

给定参与人 i 的策略 s_i，如果他有另一个策略 t_i，使得对于所有 $s_{-i} \in S_{-i}$，$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$，则称 s_i 是参与人 i 的一个**严格劣策略（strictly dominated strategy）**。此时称 s_i 被 t_i **严格占优（strictly dominated）**，或者说 t_i **严格占优于（strictly dominates）** s_i。

- 博弈论中假定，理性人不会选择严格劣策略，这并不是一个很强的假设，是符合常识的
- 在博弈论中，参与人是理性的是共同知识
- 因此囚徒困境的解是 (**承认**, **承认**)：重复剔除严格劣策略
- 还有（弱）劣策略，上述定义替换为大于等于号即可得到

并非所有博弈都有占优策略，例如：

参与人 2

参与人 1		L	R
	T	2, 1	2, −20
	M	3, 0	−10, 1
	B	−100, 2	3, 3

- 如果一个参与人已知他人使用的策略，那么他参加的博弈实际上就是要选择一个“最佳应对”；
- 考虑策略组合 (B, R)，此时每个人都不愿意单独偏离这一组合，因为 B 和 R 各自是对方的最佳应对。也就是说，如果其它参与人确实根据 (B, R) 选择了策略，那么每个人都不愿意单独偏离这一组合，所以这一策略组合是稳定的。

纳什均衡

将前述直观转化为严谨的表达：

定义

令 s_{-i} 为参与人 i 之外的所有参与人的策略组合，参与人 i 的策略 s_i 是 s_{-i} 的一个**最佳应对（best response）**，如果满足

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

基于此，可以定义博弈论中最为核心的解概念——纳什均衡：

定义

一个策略组合 $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ 是一个**纳什均衡（Nash equilibrium）**，如果对于每个参与人 i，s_i^* 是 s_{-i}^* 的一个最佳应对。

纳什均衡

基于最优反应的定义通常用于计算纳什均衡，下面这一纳什均衡的等价定义在表达上更为直接：

定义

一个策略组合 $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ 是一个纳什均衡，如果对于每个参与人 i 和任意的策略 $s_i \in S_i$ 都有

$$u_i(s^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

如果 $u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s)$，那么策略 $\hat{s}_i$ 是参与人 i 有利可图的策略偏离，纳什均衡的策略向量不允许存在有利可图的策略偏离。

混合策略纳什均衡

有的博弈可能不存在纳什均衡，例如如下石头剪刀布博弈：

参与人 2

参与人 1

	R	S	P
R	0, 0	1, −1	−1, 1
S	−1, 1	0, 0	1, −1
P	1, −1	−1, 1	0, 0

- 那么每个参与人的最优决策是什么呢？我们可以考虑一个参与人是永远出石头，那么另一个人只要观察到这一点，就可以永远出布，因此这样的策略是不合理的
- 所以可以猜想，最优的策略是随机的，要让自己的行为不可捉摸，这就引入了**混合策略（mixed strategy）**的概念

混合策略纳什均衡

定义

令 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ 为一个策略型博弈。一个**混合策略（mixed strategy）**是 S_i 上的概率分布，参与人 i 的混合策略集记为

$$\Sigma_i = \left\{\sigma_i : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\right\}$$

其中 $\sigma_i(s_i)$ 表示参与人 i 在该混合策略下选择策略 s_i 的概率。

- 因此混合策略就是给每个 S_i 中的策略（称之为**纯策略（pure strategy）**）一个概率，然后按照这个概率随机选择策略。
- 例如在石头剪刀布博弈中，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 就是一种混合策略，表示每个纯策略（出石头、剪刀和布）被选择的概率都是 $\frac{1}{3}$。
- 纯策略是混合策略特例：只有一个策略概率为 1，其余为 0。

混合策略纳什均衡

- 我们还有一个记号，对于每个参与人 i，令 $\Delta(S_i)$ 为 S_i 上的概率分布集合，即

$$\Delta(S_i) = \left\{ p : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i \in S_i} p(s_i) = 1 \right\}$$

  因此我们有 $\Sigma_i = \Delta(S_i)$。
- 有混合策略后，博弈中参与人的效用函数也需要做相应的调整，需要适应有混合策略的情况。

混合策略纳什均衡

定义

令 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ 为一个策略型博弈。G 的**混合扩展（mixed extension）**是一个博弈

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$$

其中 $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ 是参与人 i 的混合策略集，他的收益函数 $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ 将每个混合策略向量 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ 映射到一个实数

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s\in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

- 这里使用了冯诺伊曼-摩根斯坦恩效用函数，按各个纯策略出现的概率求解参与人 i 在混合策略向量 σ 下的期望收益
- 这里还蕴含一个假定：每个参与人的行动相互独立

混合策略纳什均衡

类似于纯策略纳什均衡，可以给出混合策略纳什均衡的定义。给定一个博弈的混合扩展 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$，一个混合策略向量 σ^* 是一个**混合策略纳什均衡**，若对每个参与人 i，有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

- 然而，这一定义显然不太适合用于判断和计算混合策略纳什均衡，因此引入一个更为方便的等价条件方便判断：

混合策略纳什均衡等价条件

令 $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ 为一个策略型博弈，Γ 为 G 的混合扩展。一个混合策略向量 σ^* 是 Γ 的混合策略纳什均衡，当且仅当对于每个参与人 i 和每一个纯策略 $s_i \in S_i$，有

$$U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(s_i, \sigma^*_{-i})$$

混合策略纳什均衡

证明：正向推导只需要注意到纯策略也是特殊的混合策略即可。反过来，对于参与人 i 的每个混合策略 σ_i，

$$U_i(\sigma,\sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i)U_i(s_i,\sigma_{-i}^*) \leqslant \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i)U_i(\sigma^*) = U_i(\sigma^*)$$

□

计算混合策略纳什均衡一方面可以使用最优反应方法，另一方面可以使用如下的无差异原则，更为便捷：

无差异原则

令 σ^* 为一个混合策略纳什均衡，s_i 和 $s_i{}'$ 为参与人 i 的两个纯策略，若 $\sigma_i^*(s_i),\sigma_i^*(s_i{}')>0$，则 $U_i(s_i,\sigma_{-i}^*) = U_i(s_i{}',\sigma_{-i}^*)$。

定理成立的原因很简单：如果 $U_i(s_i,\sigma_{-i}^*) > U_i(s_{i'},\sigma_{-i}^*)$，那么参与人 i 应该增加 s_i 的概率，这样可以提高自己的收益。

混合策略纳什均衡计算例题

考虑如下性别大战：一对夫妻要安排他们周末的活动，可选择的活动有看足球赛（F）和听音乐会（C）。丈夫更喜欢看足球赛，而妻子更喜欢听音乐会。如果他们选择的活动不同，那么他们都不会高兴，如果他们选择的活动相同，那么他们都会高兴，只是高兴程度略有不同：

妻子

丈夫		F	C
	F	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

显然 (F, F) 和 (C, C) 是纯策略纳什均衡，但是否存在非纯策略纳什均衡的混合策略纳什均衡呢？

混合策略纳什均衡计算例题

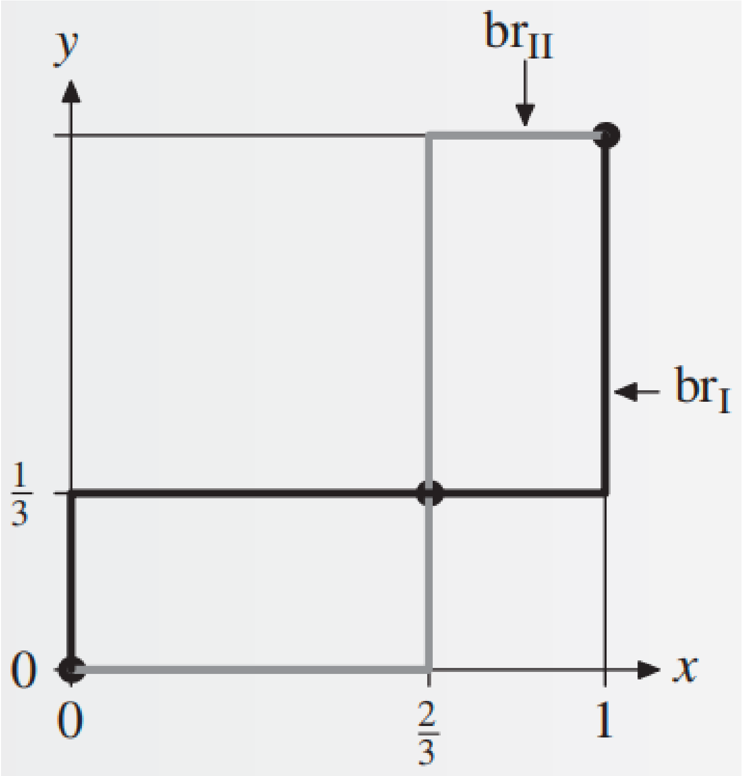
首先展示如何使用最优反应法计算混合策略纳什均衡。对于丈夫的每个混合策略 $[x(F),(1-x)(C)]$，妻子的最优反应集合为

$$\begin{aligned} br_2(x) &= \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x,y) \\ &= \{y\in[0,1]: u_2(x,y)\geqslant u_2(x,z), \forall z\in[0,1]\} \end{aligned}$$

而 $u_2(x,y)=xy\cdot 1+(1-x)(1-y)\cdot 2=2-2x-2y+3xy$，将 x 视为定值，求导即可得到最优反应集合为（丈夫同理）：

$$br_2(x):=\begin{cases}\{0\} & x\in\left[0,\frac{2}{3}\right)\\ [0,1] & x\in\left\{\frac{2}{3}\right\}\\ \{1\} & x\in\left(\frac{2}{3},1\right]\end{cases},\quad br_1(y):=\begin{cases}\{0\} & y\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\\ [0,1] & y\in\left\{\frac{1}{3}\right\}\\ \{1\} & y\in\left(\frac{1}{3},1\right]\end{cases}$$

混合策略纳什均衡计算例题



三个交点：$(x^*, y^*) = (0, 0)$，$(x^*, y^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$(x^*, y^*) = (1, 1)$，第 1 个和第 3 个是纯策略纳什均衡，第 2 个是混合策略纳什均衡，混合策略纳什均衡对应的收益为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。

混合策略纳什均衡计算例题

接下来使用无差异原则计算混合策略纳什均衡。使用无差异原则时首先需要先找到纯策略纳什均衡，否则后续计算可能会忽略。纯策略纳什均衡显然是 (F,F) 和 (C,C)。

考虑丈夫的混合策略 $\sigma_1=[x(F),(1-x)(C)]$ 和妻子的混合策略 $\sigma_2=[y(F),(1-y)(C)]$，若 $0<x<1$，$0<y<1$（称为**完全混合的均衡**）根据无差异原则必有丈夫选择 F 和 C 的效用相等：

$$U_1(F,\sigma_2)=2y=1-y=U_1(C,\sigma_2)$$

解得 $y=\frac{1}{3}$，同理可以解得 $x=\frac{2}{3}$。因此我们用无差异原则更为简便地得到了混合策略纳什均衡。

注意，无差异原则不仅是混合策略纳什均衡的必要条件，也是充分条件。因为可以证明，如果 $U_i(s_{i'},\sigma_{-i}^*)<U_i(s_i,\sigma_{-i}^*)$，则必有 $\sigma_i^*(s_{i'})=0$，故无差异原则选择的有概率纯策略的必然是最优反应策略。

关于纳什均衡的其它主题

- （混合策略）纳什均衡的存在性
  - 下一讲的主题，主要涉及上半连续性和不动点定理
- 纳什均衡的计算复杂度
  - 本学期讲授的一大主题，涉及全新复杂度类
- 策略集合连续情形下的（混合策略）纳什均衡
  - 难度较大，有一系列的论文讨论

CONTENT

目录

最大最小值

回忆如下博弈，其纯策略纳什均衡是 (B, R)：

参与人 2

参与人 1		L	R
	T	2, 1	2, −20
	M	3, 0	−10, 1
	B	−100, 2	3, 3

但行参与人选择 B 其实会很犹豫：

- 如果列参与人选了 L 怎么办（不管是因为意外，还是不理性，或是其他原因），(B, L) 是灾难性的，因此行参与人可能更偏好 T，虽然只带来 2 的收益，但可以保证避免 -100 的灾难。
- 如何保证自己避免最大的损失？选取最差情况最好的策略：最大最小策略。

最大最小值

定义

给定一个博弈，参与人 i 的**最大最小策略（maxmin strategy）**是参与人 i 的一个策略 s_i^*，满足

$$\min_{t_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i^*, t_{-i}) \geqslant \min_{t_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}), \forall s_i \in S_i,$$

即 s_i^* 下的最差情况是最优的，即可以保证自己得到收益

$$\underline{v}_i = \max_{s_i\in S_i} \min_{t_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}),$$

$\underline{v}_i$ 称为参与人 i 的**最大最小值（maxmin value）**，于是最大最小策略等价于 $u_i(s_i^*, t_{-i}) \geqslant \underline{v}_i, \forall t_{-i} \in S_{-i}$。

有时策略是无限集合，min 和 max 可能不存在，可以用下确界和上确界代替。

最大最小值

纳什均衡与最大最小值的关系由下述结果给出：

命题

对于每个参与人 i，策略型博弈的每个纳什均衡 s^* 满足

$u_i(s^*) \geqslant \underline{v}_i$

证明：

$$\begin{aligned} u_i(s_i^*, s_{-i}^*) &= \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) \\ &\geqslant \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}) \end{aligned}$$

□

最大最小值

根据定义可以求解前述博弈两个参与人的最大最小值和最大最小策略，只需首先写出每个策略下的效用最小可能值，然后选出最大化最小值的策略即可：

		Player II		
		L	R	$\min_{s_{II} \in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$
Player I	T	2, 1	2, −20	2
	M	3, 0	−10, 1	−10
	B	−100, 2	3, 3	−100
$\min_{s_I \in S_I} u_{II}(s_I, s_{II})$		0	−20	2, 0

纳什均衡可以确保“稳定性”，最大最小策略可以保证“安全性”，能否同时满足这两个条件呢？零和博弈可以保证这一点。

零和博弈的定义

定义

如果对每个策略向量 (s_1, s_2)，有 $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$，那么这个博弈是一个（双人）**零和博弈（zero-sum game）**。

- 事实上，一个双人博弈（不一定是零和的）又叫作双矩阵博弈。一个双矩阵博弈可以描述为两个 $m \times n$ 的收益矩阵 A 和 B，其中一个是行参与者的，一个是列参与者的。
- 在零和博弈中，$B = -A$，因此零和博弈只需要一个矩阵就可以表达，其中表格中的每个元素是行参与者的收益，列参与者的收益是这个数的相反数。
- 例如石头剪刀布博弈的零和博弈表示：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

最大最小值和最小最大值

设收益矩阵为 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，当行参与者的混合策略为 $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_m)$，列参与者的混合策略为 $\boldsymbol{y}=(y_1,...,y_n)$ 时，行参与者的期望收益是（列参与人是相反数）

$$u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}$$

接下来的目标是证明，零和博弈的纳什均衡和最大最小值等价，因此可以同时实现稳定性和安全性。首先看参与人 1 和 2 的最大最小值：

$$\underline{v}_1=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}$$

$$\underline{v}_2=\max_{\boldsymbol{y}}\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-A)\boldsymbol{y}=-\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}$$

最大最小值和最小最大值

基于上述讨论可以给出如下定义：

定义

定义双人零和博弈的

- 最大最小值为 $\underline{v} = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$，取得最大最小值的 $\boldsymbol{x}$ 称为行参与者的最大最小策略；
- 最小最大值为 $\overline{v} = \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$，取得最小最大值的 $\boldsymbol{y}$ 称为列参与者的最小最大策略。

- 行参与者知道对方要尽可能得到最小的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$，故最大最小值是行参与者的安全选择；列参与者知道对方要尽可能得到最大的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$，因此最小最大值是列参与者的安全选择。
- 如果 $\underline{v} = \overline{v}$，此时 $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = 0$，直观而言，这意味着行参与者的最大最小策略和列参与者的最小最大策略可以“相遇”，两个有良好性质的策略同时实现或许可以达到一个均衡？——确实如此，这就是零和博弈的纳什均衡。

极小极大定理

在任意零和博弈中，都有 $\underline{v} = \overline{v}$ 成立，或者展开来说，

$$\max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} = \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$$

称 $\underline{v} = \overline{v}$ 为双人零和博弈的**值（value）**。极小极大定理的证明方式是分别证明 $\underline{v} \leqslant \overline{v}$ 和 $\underline{v} \geqslant \overline{v}$。前一半的证明非常简单，后一半相对较为复杂，本讲的核心就是给出后一半的三种证明，在之后讨论在线学习时还会给出第四种证明。首先证明 $\underline{v} \leqslant \overline{v}$:

证明：令 $y^* = \arg\min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$，则

$$\underline{v} = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} \leqslant \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}^* = \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} = \overline{v}$$

□

技术上的说明

上述证明第一步令 $y^* = \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}$ 依赖于两个结论:

- 如果 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $y \mapsto \max_x f(x,y)$ 也是连续函数，严格的证明可见 mathstackexchange 上的回答;
- 紧集上的连续函数必能取最大/最小值。

事实上 $y \mapsto \max_x f(x,y)$ 这样的函数与经济学优化问题中著名的包络定理有关，常用于间接效用函数等优化:

包络定理

若 $f(x,y)$ 可微，令 $g(y) = \max_x f(x,y)$，$x(y)$ 表示固定 y 时最大化 $f(x,y)$ 的 x，则

$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}.$$

技术上的说明

证明：根据极值一阶条件，对任意的 y，对应极值点 x 必然满足

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$$

根据隐函数定理，只要雅可比行列式 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\neq 0$，即可解出 x 作为 y 的可微函数，记为 $x(y)$。根据链式法则有

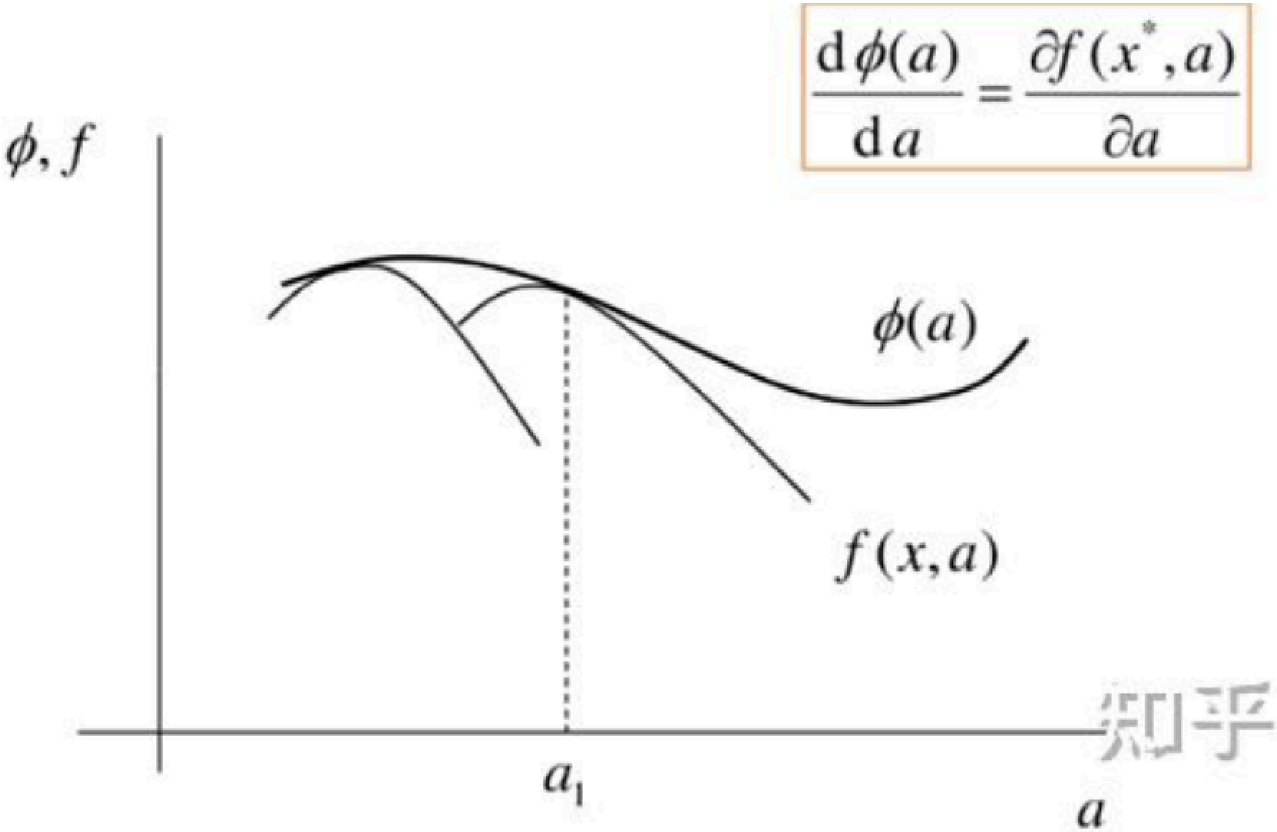
$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}+\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}$$

$\square$

一个简单的例子，$f(x,y)=-yx^2+2x+1$，可以算出 $x(y)=\frac{1}{y}$，$g(y)=1+\frac{1}{y}$，则 $\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{y^2}=-x(y)^2=\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}$，因此使用包络定理可以简化一些优化问题的求解。

技术上的说明

包络定理的几何解释如下：



当 $f(x,a)$ 中的 a 变化到使得 $x = x(a)$ 时与 $\phi(a)$ 相切，因此 $\phi(a)$ 是一系列 $f(x,a)$ 的包络线。

极小极大定理的第一种证明将在下一定理的证明过程中给出：

定理

对于一个双人零和博弈，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ 是纳什均衡当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 是行参与者的最大最小策略，$\boldsymbol{y}^*$ 是列参与者的最小最大策略。

这一定理说明，对于双人零和博弈，纳什均衡和最大最小策略是等价的，因此我们可以通过计算最大最小值来求解纳什均衡，并且零和博弈的解概念（即“值”）的兼具稳定性和安全性。

证明：从纳什均衡出发，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^* &= \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^* \geqslant \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} \\ &\geqslant \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} \geqslant \min_{\boldsymbol{y}} (\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^*\end{aligned}$$

故三个不等号必须取等号，其中第一、三个不等号取等表明 $\boldsymbol{x}^*$ 是行参与者的最大最小策略，$\boldsymbol{y}^*$ 是列参与者的最小最大策略。第二个不等号取等就是极小极大定理。**根据纳什定理，双人零和博弈必然存在纳什均衡，故对任意的双人零和博弈，极小极大定理成立**。

下面继续完成这一定理的证明，从最大最小策略出发，有

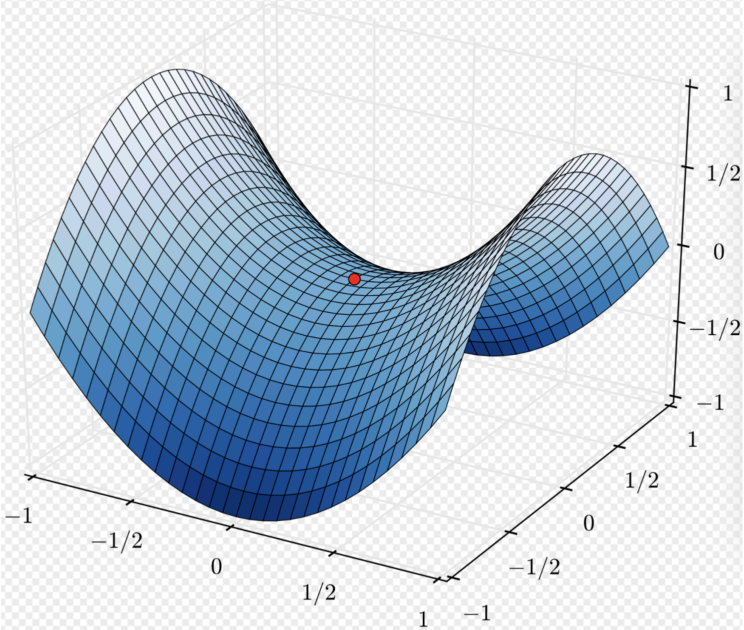
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^* &\geqslant \min_{\boldsymbol{y}} (\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} \\ &= \min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^* \geqslant (\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{y}^*\end{aligned}$$

故两个不等号必须取等号，因此 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{y}^*$ 的最优反应，且 $\boldsymbol{y}^*$ 是 $\boldsymbol{x}^*$ 的最优反应，因此 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ 是一个纳什均衡。从而这一定理统一了零和博弈的安全性和稳定性，也表明零和博弈纳什均衡具有唯一性（一般博弈没有这一性质）。 $\square$

极小极大定理的拓展形式

令 $X, Y \in \mathbb{R}^N$ 是紧凸集，$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续的**凹-凸函数（concave-convex function）**，即对于任意 $y \in Y$，$f(x, y)$ 是 x 的凹函数，对于任意 $x \in X$，$f(x, y)$ 是 y 的凸函数。则有

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$



图中给出了 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 的图像，形象地解释了这一定理。

极小极大定理拓展形式

关于极小极大定理，还有如下几点值得说明：

- 上图中的“极大极小点”又称为**鞍点（saddle point）**，因其形状类似马鞍。
- 极小极大定理的一半，即极大极小值小于等于极小极大值是普遍成立的，与函数形式无关，这从之前的证明可以看出。
- 姚期智先生在算法复杂度领域也提出了一个极小极大定理，用于分析随机算法在随机输入上的期望复杂度，感兴趣的读者可以参考 Wikipedia 上的词条。
- 事实上极小极大定理还可以进一步推广，感兴趣的读者可以参考 Wikipedia 上的 Minimax theorem 等相关词条。

GAN 与零和博弈

生成对抗网络（Generative Adversarial Networks, GAN）是一种深度学习模型，由生成器（Generator，简称 G）和判别器（Discriminator，简称 D）组成，其中生成器生成数据，判别器判断数据来源于真实数据还是生成器生成的。判别器希望准确判断，生成器希望生成数据能够“骗过”判别器，这一零和博弈的效用函数为

$$V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z}[\log(1-D(G(z)))],$$

其中 p_{data} 是真实数据的分布，p_z 是生成器的输入分布，因此 $V(D,G)$ 越大说明判别器越好，反之生成器越好。因此判别器的目标是 $\max\limits_D \min\limits_G V(D,G)$，生成器则是 $\min\limits_G \max\limits_D V(D,G)$。最终稳定的情况是生成器生成的数据和真实数据的分布相同，判别器无法区分真实数据和生成数据。

论文链接：Goodfellow 的原论文、Arora 等人的博弈分析。

CONTENT

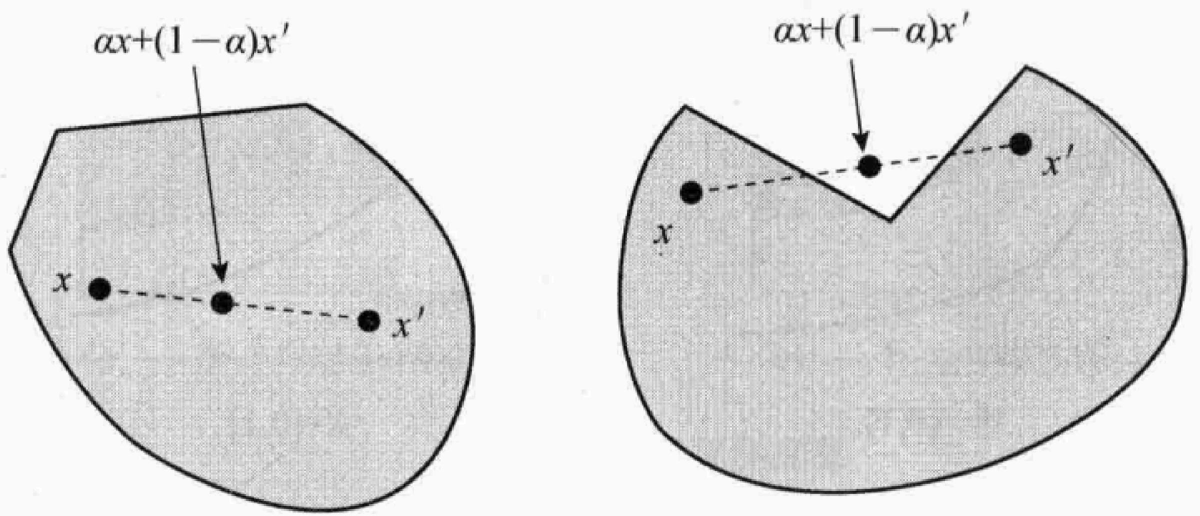
目录

为了讲解极小极大定理的第二种证明，我们需要引入一些概念：

定义

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^N$ 是凸（**convex**）的，如果对于任何 $x, y \in A$ 和 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，都有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$。

简单地说，若连接 $\mathbb{R}^N$ 中的某个集合中的任何两个向量的线段都在该集合中，则该集合是凸的。

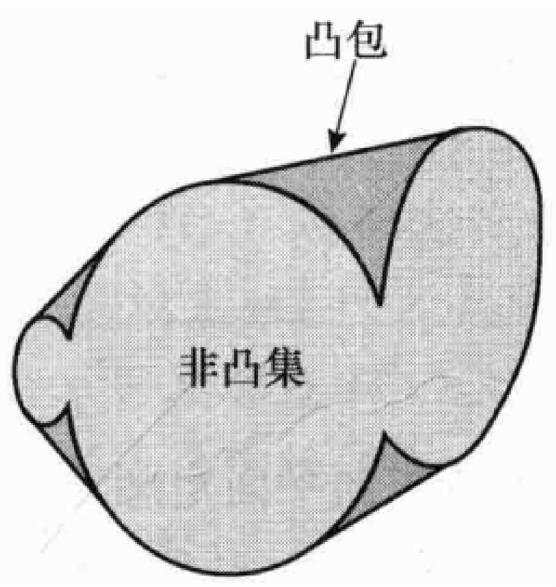


(a) 中的集合为凸集 (b) 中的集合为非凸集

凸包

定义

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^N$ 的**凸包（convex hull）**是包含 A 的最小凸集，等价的，是所有包含 A 的凸集的交集，记为 $\mathrm{conv}(A)$。



容易验证凸包也等于 A 中元素所有可能的凸组合的集合，即

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

超平面和半空间

定义

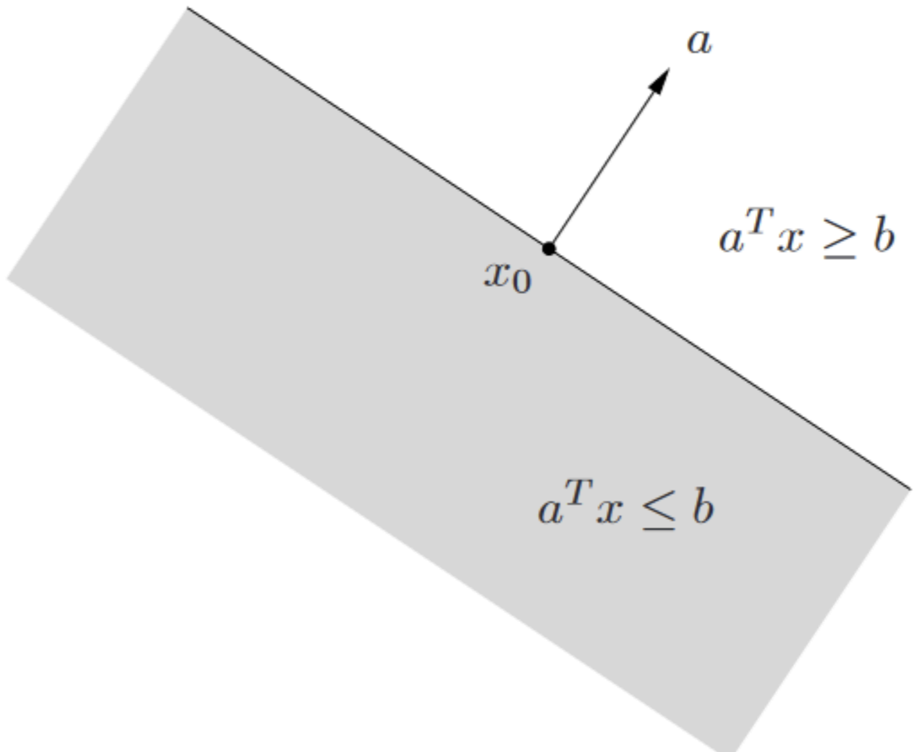
$\mathbb{R}^n$ 中的一个**超平面（hyperplane）** $H(a,b)$ 可以由一个法向量 $a \in \mathbb{R}^n$ 和一个标量（称为截距） $b \in \mathbb{R}$ 确定，即

$$H(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\}$$

其中 $\langle a, x\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ 是 a 和 x 的内积。

记 $H^+(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geqslant b\}$ 和 $H^-(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leqslant b\}$ 分别为超平面 $H(a,b)$ 的**半空间（half-space）**。

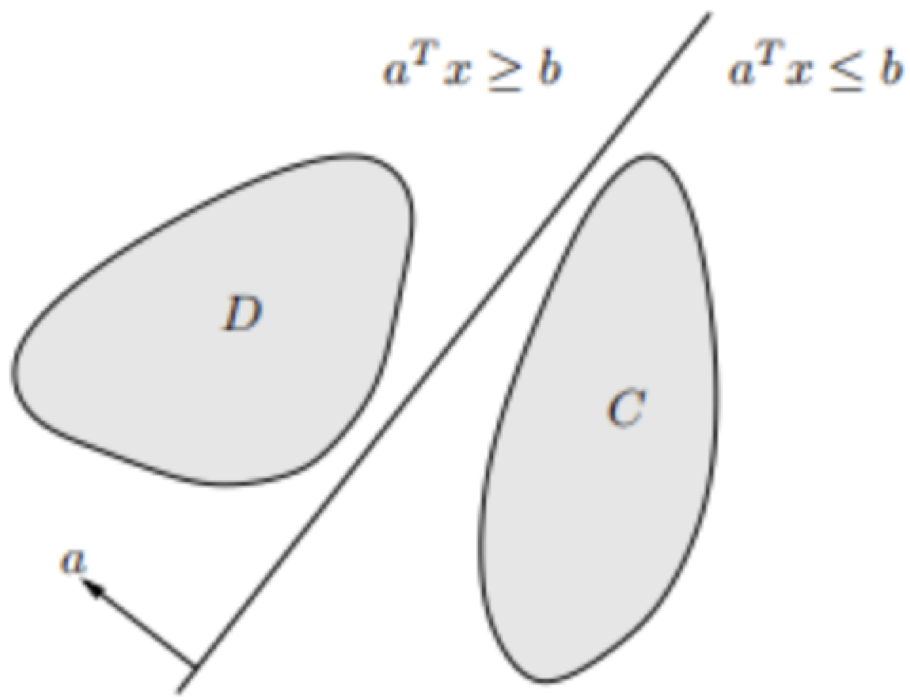
不难验证，**有限个半空间的交集是凸集**。



可将超平面定义 $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ 视为用线性约束得到 $n-1$ 维“平面”。a 称为法向量的原因是，若任取 $x_1, x_2 \in H(a,b)$，有 $\langle a, x_1\rangle = \langle a, x_2\rangle = b$，故 $\langle a, x_1\rangle - \langle a, x_2\rangle = 0$，即 $\langle a, x_1 - x_2\rangle = 0$，故 a 与 $H(a,b)$ 上任意向量正交。

分离超平面定理

接下来进一步讨论与凸集相关的概念和结论以方便之后的讨论。首先是分离超平面定理，在之后的讨论中广泛应用。其几何直观为：若两个凸集不相交，则存在一个超平面将它们分开。



为了严格叙述并证明这一定理，首先给出分离的定义：

定义

称两个集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ 被超平面 $H(a,b)$ 分离，如果 $A \subseteq H^+(a,b)$ 且 $B \subseteq H^-(a,b)$（或反之）。称分离是严格的，如果 $A \subseteq H^+(a,b) \setminus H(a,b)$ 且 $B \subseteq H^-(a,b) \setminus H(a,b)$（或反之）。

为了证明分离超平面定理，回忆一个基本的结果：如果 X 是一个闭集，则对每个点 $x \notin X$，至少存在一个点 y 距离 x 最近。接下来要证明的是，如果 X 是闭凸集，最近的点是唯一的：

引理

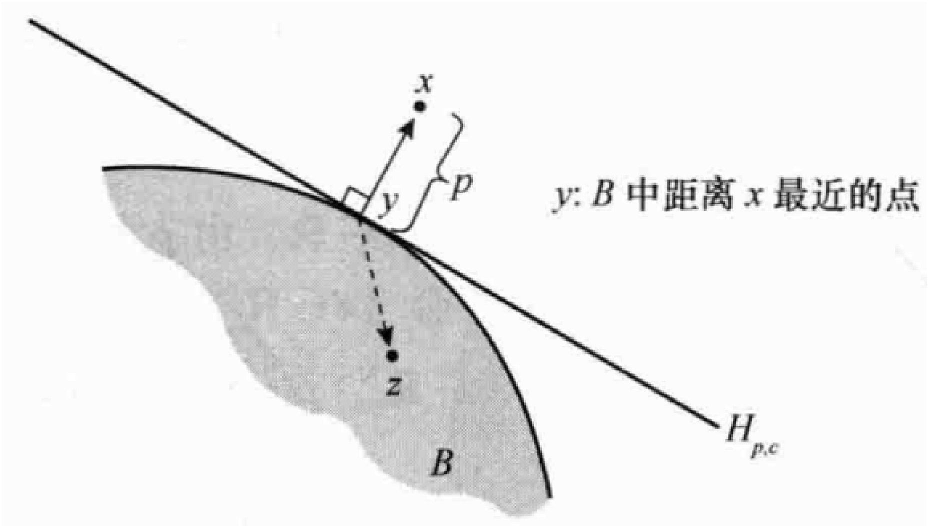
令 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个闭凸集，$x \in \mathbb{R}^n$ 是一个不在 X 中的点，则存在唯一的 $y \in X$，使得 $d(x, X) = d(x, y)$。

基于这一引理，可以证明下面的引理，事实上也是分离超平面定理的一个特例：

引理

令 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个闭凸集，$x \in \mathbb{R}^n$ 是一个不在 B 中的点，y 是 B 中距离 x 最近的点。那么超平面 $H(x-y, \langle x-y, y\rangle)$ 将 B 和 x 分离。进一步地，存在超平面将 B 和 x 严格分离。

其中 $x-y$ 就是超平面的法向量，$\langle x-y, y\rangle$ 使得超平面经过 y。



分离超平面定理

分离超平面定理

令 $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是两个凸集，如果 $A \cap B = \emptyset$，则存在超平面 $H(a, b)$ 将 A 与 B 分离。

- 可以先根据引理证明 A, B 都是闭凸集时的结果，然后对非闭集的情况取闭包即可。
- 需要注意的是，两个闭凸集之间不一定可以严格分离，这一点可以从两个不相交的闭集距离可以等于 0 看出来。
  - 注意到 $y = \frac{1}{x}$ 的函数曲线与 x 轴都是闭集，但它们之间的距离为 0 即可。
- 等价的表达为，存在 $p \in \mathbb{R}^n$ 且 $p \neq 0$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $p \cdot x \geqslant c$ 且 $p \cdot y \leqslant c$ 对任意的 $x \in A$ 和 $y \in B$ 成立，严格分离的情况下可以取到严格不等号。

支撑超平面定理

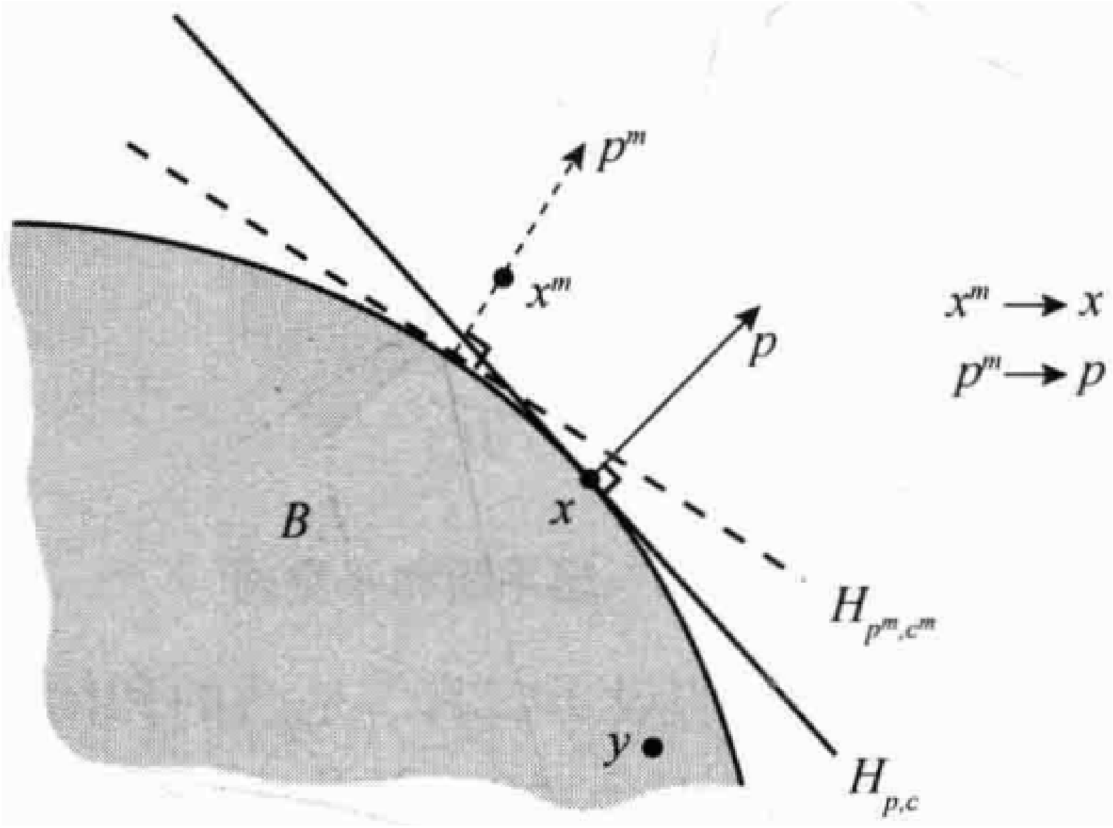
令 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，$x \in B$ 不是 B 的内点。则存在 $p \in \mathbb{R}^N$ 且 $p \neq 0$ 使得 $p \cdot x \geqslant p \cdot y$ 对任意的 $y \in B$ 成立。

大致证明思想如下：由于 x 不是 B 的内点，在直觉上，可以找到一个序列$x^m \to x$，使得对于所有 m，x^m 都不是集合 B 的闭包的元素。根据分离超平面定理，对每个 m，存在一个 $p^m \neq 0$ 和一个 $c^m \in \mathbb{R}$ 使得

$$p^m \cdot x^m > c^m \geqslant p^m \cdot y$$

对每个 $y \in B$ 成立。不失一般性，我们可以假设对于每个 m 都有 $\|p^m\| = 1$，故可抽出一个子序列，存在 $p \neq 0$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $p^m \to p$ 和 $c^m \to c$。对上式取极限，可得 $p \cdot x \geqslant p \cdot y$ 对任意的 $y \in B$ 成立。

下面是上述证明思想的一个示意图：



基于分离超平面定理，可以给出极小极大定理的第二种证明。首先给出一个引理：

引理

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，则以下两个条件必成立其一：

1. 0 在如下 $n+m$ 个点的凸包中：$a_1 = (a_{11}, ..., a_{m1}), ..., a_n = (a_{1n}, ..., a_{mn})$ 和 $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_m = (0, ..., 0, 1)$，即矩阵的各列和 m 维向量空间的自然基；
2. 存在 $x_1, ..., x_m$ 满足 $x_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^m x_i = 1$，使得 $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i > 0$ 对任意的 $j \in \{1, ..., n\}$ 成立。

第二个条件的几何意义很明确，即存在一个正卦限中的向量与 A 的所有列向量的内积都是正的，并且可以直接保证 $\underline{v} > 0$，在极大极小定理证明中有直接的作用。

这一引理自然引起了两种情况下的分类讨论，从而证明极小极大定理。接下来首先证明这一引理。

证明：记 $C := \mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_n, e_1, \ldots, e_m)$。若条件 1 成立，则定理成立。若条件 1 不成立，则 $0 \notin C$，根据分离超平面定理，存在 $p \in \mathbb{R}^m$ 使得 $p \cdot x > p \cdot 0 = 0$ 对任意的 $x \in C$ 成立。由于 $e_i \in C$，则 $p \cdot e_i > 0$ 对任意的 i 成立，即 $p = (p_1, \ldots, p_m)$ 满足 $p_i > 0$。

令 $x_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$，则 $x_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^m x_i = 1$。对任意的 j，有

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{p_i}{\sum_{i=1}^m p_i} = \frac{a_j \cdot p}{\sum_{i=1}^m p_i} > 0,$$

故引理成立。 $\square$

在引理的基础上可以证明极小极大定理：

证明：假设引理第一种情况成立，即 $0 \in C$，则存在 $s_1, \ldots, s_{n+m}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} s_j a_{ij} + s_{n+i} = 0, i = 1, \ldots, m$$

假设 $s_i = 0$ 对所有的 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 成立，则由于 $e_1, \ldots, e_m$ 是一组基，则只能有 $s_{n+i} = 0$ 对 $i = 1, \ldots, m$ 成立，这与 $\sum_{i=1}^{n+m} s_i = 1$ 矛盾。故存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $s_i > 0$，故可令 $y_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$，则 $y_i \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$，且有 $\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} = -\frac{s_{n+i}}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \leqslant 0$，故有 $\underline{v} \leqslant \overline{v} \leqslant 0$。

假设引理第二种情况成立，立即可得 $\overline{v} \geqslant \underline{v} > 0$。由于两者情况必有其一成立，故不可能有 $\underline{v} \leqslant 0 < \overline{v}$。

考虑 $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，满足 $b_{ij}=a_{ij}+k$，不难得到 $x^{\mathrm{T}}By=x^{\mathrm{T}}Ay+k$，对双人矩阵 B 博弈使用之前的讨论可知，不可能有 $\underline{v}+k\leqslant 0<\overline{v}+k$，即不可能有 $\underline{v}\leqslant -k<\overline{v}$，由于这对任意的 k 都成立，故不可能有 $\underline{v}<\overline{v}$，故只能有 $\underline{v}=\overline{v}$，即极小极大定理成立。 $\square$

CONTENT

目录

关于线性规划与线性规划对偶的基础知识，现成的资料已经非常全面，这里不再赘述，有兴趣的同学可以参考如下资料：

- 芝加哥大学徐海峰老师课件：线性规划基础和线性规划对偶；
- 金鱼马的知乎：线性规划的几何基础、线性规划单纯形法和线性规划的对偶；

第一部分的课件内容已经足够，如果想要阅读更详细的推导过程或者有更深入的了解，可以参考第二部分的知乎专栏。

接下来使用线性规划强对偶定理证明极小极大定理。这一证明也将表明，双人零和博弈纳什均衡的计算可以通过求解线性规划问题解决。

证明：首先，不难理解有如下表达式：

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Delta([m])}\min_{\boldsymbol{y}\in\Delta([n])}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}=\max_{\boldsymbol{x}\in\Delta([m])}\min_{j\in[n]}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Ae_j,$$

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\Delta([n])}\max_{\boldsymbol{x}\in\Delta([m])}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}=\min_{\boldsymbol{y}\in\Delta([n])}\max_{i\in[m]}e_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}$$

其中 $[m]=\{1,...,m\}$，$[n]=\{1,...,n\}$ 是常用记号，e_j 和 e_i 表示第 j 和第 i 个自然基。第一个表达式成立的原因在于，对于任意的 $\boldsymbol{x}\in\Delta([m])$，必然有某个纯策略 e_j 使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Ae_j$ 达到最小值，这是因为混合策略效用只是纯策略效用的期望值。第二个表达式的证明类似。

基于上述表达式，可以写出最大最小值和最小最大值对应的线性规划形式如下：二者互为对偶问题，且二者最优解有界，根据强对偶定理，二者最优解相等，即极小极大定理成立。 □

最大最小值

$$
\begin{aligned}
\max\ & u \\
\text{s.t.}\ & u \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \quad \forall j \in [n] \\
& \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\
& x_i \geqslant 0, \qquad \forall i \in [m]
\end{aligned}
$$

最小最大值

$$
\begin{aligned}
\min\ & v \\
\text{s.t.}\ & v \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad \forall i \in [m] \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\
& x_i \geqslant 0, \qquad \forall j \in [n]
\end{aligned}
$$

一般约束优化问题

线性规划是一类特殊的约束优化问题，一般的约束优化问题。只有等式的约束优化问题的求解方式在微积分中就已经给出，即拉格朗日乘子法。对于有不等式约束的问题，在写出拉格朗日函数后，可以使用库恩-塔克条件（KKT 条件）进行求解——这是经济学中最常用的技术之一。

相关内容属于凸优化范畴，可以阅读金鱼马的知乎专栏。事实上，本讲中线性规划的对偶、弱对偶定理和强对偶定理等只是凸优化中相关内容的特例。