ZJU 2024–2025 学年春夏学期
计算经济学讨论班

Lec2: 不动点与纳什定理

吴一航　yhwu_is@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

CONTENT

目录

仿射无关性

Sperner 引理是通向不动点定理的非高等方法的第一步，为了引入 Sperner 引理，我们需要首先介绍仿射无关性的概念。

定义

$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $x^0, x^1, ..., x^k$ 是仿射无关的，条件是：$\mathbb{R}$ 内未知数为 $(\alpha^l)_{l=0}^k$ 的如下方程：

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha^l x^l = 0$$

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha^l = 0$$

只有唯一解 $\alpha^0 = \alpha^1 = ... = \alpha^k = 0$。如果这一条件不满足，则称向量 $x^0, x^1, ..., x^k$ 是仿射相关的。

仿射无关性

这一定义并不直观，但我们可以联系一个相关的概念：线性相关来讨论这一定义的直观：考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量 x^0, x^1, x^2，它们线性相关的含义是，其中一个向量能被另外两个向量线性表示（等价的，可以写成线性组合的形式）。那么仿射相关的含义其实是，其中一个向量可以写成另外两个向量的**仿射组合（affine combination）**，即组合的系数求和为 1），例如

$$x^0 = tx^1 + (1-t)x^2$$

移项可得 $x^0 - tx^1 + (t-1)x^2 = 0$，三个向量前的系数为 $(1, -t, t-1)$，故不全为 0 但求和为 0（其实系数求和为 0 就是因为等号左侧 x^0 前的系数是 1，而等号右侧因为是仿射组合所以系数求和为 1，移项之后就求和为 0 了），根据前面的定义可知的确是仿射相关的。由此可知，**仿射无关的等价定义就是任何向量都不能被其它向量仿射表示**。这与线性相关类似，因此很多的概念和性质都可以类比到仿射相关上。

仿射无关性

仿射无关的几何直观也是自然的：三个点仿射无关，也就是任何一个点不能被其余两个仿射表示，注意**两个点的仿射组合就是两点确定的直线**，因此只要**平面上三点不共线就是仿射无关的**。空间中四个点的仿射无关我们需要考察任意三个点的仿射组合是什么：实际上就是三个点所在的平面！因此只要四点不共面即可实现仿射无关。

由此也可以发现仿射无关和线性无关尽管非常相似，但并不是一个概念。平面上三点不共线就可以仿射无关，但考虑 $(1,0),(0,1),(1,1)$ 这三个点，它们是线性相关的。反之，根据线性无关的定义可以直接推出仿射无关，因此仿射无关是一个更弱的约束。

仿射相关与线性相关

定理

对 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $S=\{x^0,x^1,...,x^k\}(k\geqslant 2)$，下列说法等价：

1. S 仿射相关；
2. S 中的一个点可以被其余点的仿射组合表示；
3. $x^1-x^0,x^2-x^0,...,x^k-x^0$ 线性相关。

1 和 2 的等价性之前已解释。第三条一方面很容易让我们回想起非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解的性质，实际上 $AX=b$ 的解可以视为 $\{X_0,X_0+X_1,...,X_0+X_p\}$ 的全体仿射组合的结果，其中 X_0 是 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,...,X_p$ 是 $AX=0$ 的基础解系；另一方面，1 和 3 的等价性表明，S 仿射无关等价于 $x^1-x^0,x^2-x^0,...,x^k-x^0$ 线性无关，因此 $\mathbb{R}^n$ 中可能存在 $n+1$ 个仿射无关向量，但是不存在 $n+2$ 个仿射无关向量，否则这样作差会得到 $n+1$ 个线性无关向量：

仿射相关与线性相关

推论

$\mathbb{R}^n$ 中可能存在 $n+1$ 个仿射无关向量，但是不存在 $n+2$ 个仿射无关向量。

我们知道，$\mathbb{R}^n$ 中 n 个线性无关向量构成一组基，因此空间中任一向量都可以在基下唯一表示。类似的，一组仿射无关向量 $x^0, x^1, ..., x^k$ 的全体仿射组合 $\mathrm{aff}\{x^0, x^1, ..., x^k\}$ 中的全体向量也应当可以在 $x^0, x^1, ..., x^k$ 下有唯一的仿射表示（证明与线性空间类似，略去）。

重心坐标系统

在线性空间中，张成整个空间的一组线性无关向量称为一组基，这组基相当于给这个线性空间加了一个坐标系。在仿射组合中，每个向量的唯一仿射表示的系数也构成一个坐标，我们称之为**重心坐标（barycentric coordinates）**，这个坐标系统也就称为**重心坐标系统**。

重心坐标的含义实际上很明确。回忆 n 个质量分别为 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 的质点在空间中的重心坐标，假设质点的位置分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$，那么重心坐标就是

$$\boldsymbol{r} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

等号右侧事实上就是一个仿射组合，因此“重心”这一名词是很直观的。

单纯形的基本概念

基于此前的定义，可以给出如下单纯形的定义：

定义

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为一个 k 维**单纯形（simplex）**，如果 S 是由 $k+1$ 个仿射无关的向量 $x^0, x^1, ..., x^k$ 张成的凸包，即

$$S = \operatorname{conv}\left(x^0, x^1, ..., x^k\right) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i \mid \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

我们将上述单纯形记作 $\langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$。显然，一个单纯形是一个凸紧集，零维单纯形是一个单点集合，一维单纯形就是一个闭区间，二维单纯形是一个三角形，三维单纯形是一个四面体，等等。并且单纯形的顶点根据定义就是 $x^0, x^1, ..., x^k$。下面这一定理是重心坐标系统的自然推论，表明单纯形内的每一个向量都可以被表达为单纯形顶点的凸组合：

单纯形的基本概念

定理

令 $x^0, x^1, ..., x^k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $k+1$ 个仿射无关的向量，令 $y \in \mathrm{conv}(x^0, x^1, ..., x^k)$，则 y 可以表达为 $x^0, x^1, ..., x^k$ 的唯一凸组合。换言之，$\mathbb{R}$ 中未知数为 $(\alpha^l)_{l=0}^k$ 的如下方程有唯一解：

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha^l x^l = y$$

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha^l = 1$$

$$\alpha^l \geqslant 0, \forall l = 0, 1, ..., k$$

用重心坐标系统解释就是，如果在每个点 x^l 处放一个质量为 α^l 的质点，所有质点质量之和为 1，那么这些质点的重心就是 y。

单纯形的基本概念

一个显然的事实是，仿射无关向量组的子集仍然是仿射无关的，因此我们还可以有下面的结论以及相关的定义：

定义

令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，那么对每个集合 $\langle\langle x^{\{l_0\}}, ..., x^{\{l_t\}} \rangle\rangle \subseteq \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$，$\langle\langle x^{\{l_0\}}, ..., x^{\{l_t\}} \rangle\rangle$ 张成的凸包称为 S 的一个 t 维**面（face）**，事实上也是一个 t 维**子单纯形（subsimplex）**。特别地，S 的每个顶点都是 S 的一个 0 维面，S 本身是一个 k 维面。

这一定义非常直观，例如一个四面体的所有面就是所有顶点、所有边、所有三角面，以及整个四面体本身。

单纯形的基本概念

进一步地，可以定义单纯形的边界：

定义

令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，S 的**边界（boundary）**定义为 S 的所有 $k-1$ 维子单纯形（或 $k-1$ 维面）的并集，即

$$\partial S = \bigcup_{l=0}^{k} \langle\langle x^0, x^1, ..., x^{\{l-1\}}, x^{\{l+1\}}, ..., x^k \rangle\rangle$$

这一定义也是很自然的，例如一个三角形的边界就是三角形的三条边，一个四面体的边界就是四面体的所有面。有了如上定义的基础，我们将要定义一个比较复杂的概念，即单纯形的划分，这一定义是斯佩纳引理的讨论基础。

单纯形的划分

定义

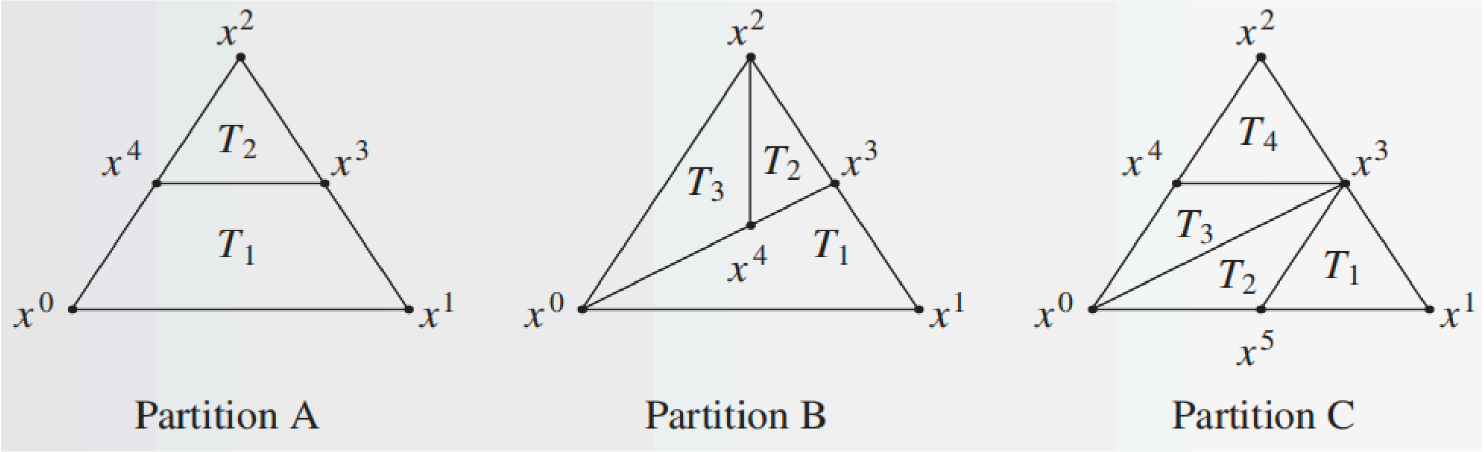
令 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 k 维单纯形，S 的一个**划分（partition）**是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组单纯形 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_M\}$，满足：

1. $\bigcup_{m=1}^{M} T_m = S$：划分的所有单纯形的并集是整个单纯形 S；
2. 对每个 $0 \leqslant j \leqslant m \leqslant M$，交集 $T_j \cap T_m$ 要么是空集，要么是 T_j 和 T_m 共同的面；
3. 如果 T 是 $\mathcal{T}$ 中的一个单纯形，那么 T 的所有面也是 $\mathcal{T}$ 中的单纯形；
4. 如果 T 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 l 维单纯形（$l < k$），那么它被包含在 $\mathcal{T}$ 中的一个 $l+1$ 维单纯形内。

定义的 1 和 2 看起来非常正常，3 和 4 或许有些摸不着头脑。事实上 3 想表达的就是 $\mathcal{T}$ 中任何单纯形的子单纯形也在 $\mathcal{T}$ 中，4 则是 $\mathcal{T}$ 中低维的单纯形都包含在一个高维单纯形中。

单纯形的划分

简单来说是在规定这个集合需要满足的特点，熟悉拓扑公理化定义的应该也可以接受这样抽象的定义。当然接受抽象定义之后我们需要看一些例子来理解定义：



A 显然不是一个合规的划分，T_1 甚至不是单纯形：平面上 4 点必仿射相关，故四边形非单纯形。B 也不满足定义，因为 T_1 和 T_2 交集不是 T_1 的面，T_1 与 T_3 同理。C 是一个合理的划分，其中 $\mathcal{T}$ 包含 T_1, T_2, T_3, T_4 以及它们的所有面。相比之下，$T_1, T_2, T_3, T_4, T_1 \cup T_2$ 和它们所有的面并不构成划分，因为 T_1 和 $T_1 \cup T_2$ 的交集是 T_1，这不是$T_1 \cup T_2$ 的一个面。

单纯形的划分

事实上，根据单纯形划分的定义中第 1、4 两条，我们可以得到结论：k 维单纯形 S 等于 $\mathcal{T}$ 中所有 k 维单纯形的并集。这一点在上面的 C 中也是可以看出来的。

关于单纯形，我们还可以引入一个记号，之后将会用到。对于每个单纯形划分 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, ..., T_M\}$，我们用 $Y(\mathcal{T})$ 表示单纯形 $(T_m)_{m=1}^M$ 的所有顶点的集合，例如上图 C 中，$Y(\mathcal{T}) = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$。等价地说，每个 $T_m \in \mathcal{T}$ 都是 $Y(\mathcal{T})$ 内一些点的凸组合。

单纯形的划分

最后用一个很难证明（因此这里不给出证明）的定理来结束对单纯形划分的讨论，它将会在斯佩纳引理的证明中用到。

定理

令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，$\mathcal{T}$ 是 S 的一个划分，$T \in \mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 $k-1$ 维单纯形。如果 T 在 S 的边界内，那么 T 被包含在 $\mathcal{T}$ 内的唯一一个 k 维单纯形内；如果 T 不在 S 的边界内，那么 T 被包含在 $\mathcal{T}$ 内的两个 k 维单纯形内。

回顾之前例子中的 C，一维单纯形 $\langle\langle x^1, x^3 \rangle\rangle$ 在 S 的边界内，它的确被包含在 $\mathcal{T}$ 内的唯一一个二维单纯形 T_1 内；而 $\langle\langle x^3, x^5 \rangle\rangle$ 不在边界内，它也的确被包含在 $\mathcal{T}$ 内的两个二维单纯形 T_1, T_2 内。由此我们可以感受到这一定理是非常直观的，边界上的就在唯一分区中，而内部的就在两个分区中，很符合我们对“划分”的直观，但严格证明技术性很强，因此略去。

单纯形的着色

回忆若 $S=\langle\langle x^0,x^1,\dots,x^k\rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单纯形，那么每个向量 $y\in S$ 都可以唯一表示为 $x^0,x^1,\dots,x^k$ 的凸组合：$y=\sum_{l=0}^{k}\alpha^l x^l$，其中 $\alpha^l\geqslant 0$ 且 $\sum_{l=0}^{k}\alpha^l=1$。在此基础上，定义

$$\mathrm{supp}_{S(y)}=\{l:\alpha^l>0\}$$

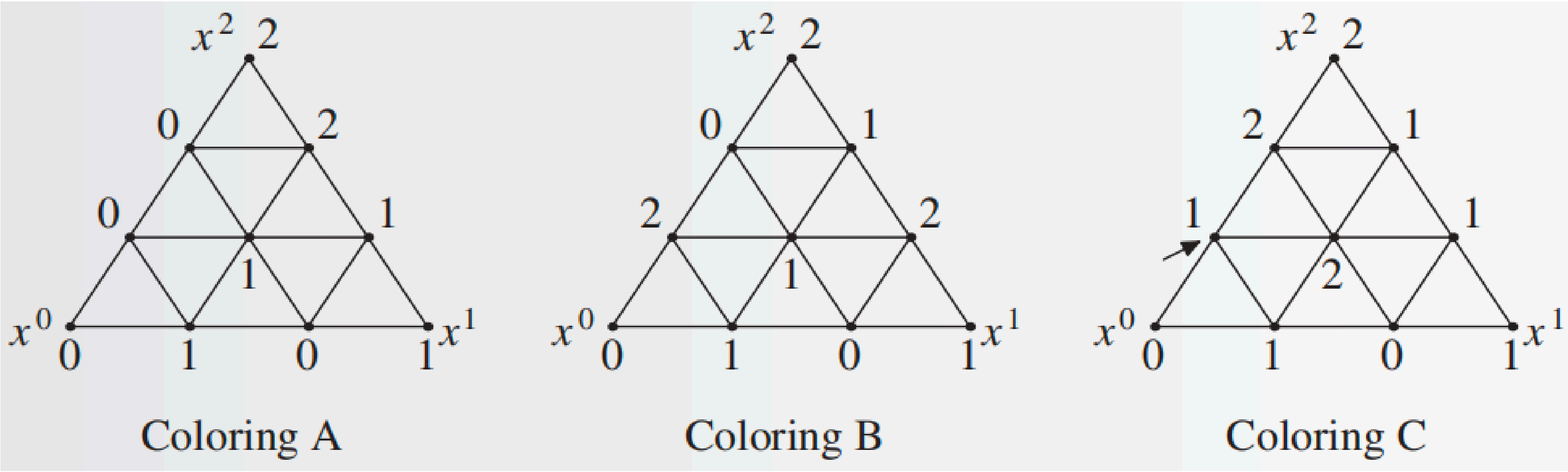
为 y 的支撑集。回忆一下，如果 $\mathcal{T}$ 是 S 的划分，那么 $Y(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{T}$ 内所有单纯形的顶点的集合，我们有如下定义：

定义

令 $S=\langle\langle x^0,x^1,\dots,x^k\rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，对于 $n\geqslant k$，令 $\mathcal{T}$ 是 S 的一个划分。$\mathcal{T}$ 的一个**着色（coloring）**是一个从 $Y(\mathcal{T})$ 到 $\{0,1,\dots,k\}$ 的映射 c，将每个顶点映射到一个颜色（每个颜色是一个指数）。如果对每个 $y\in Y(\mathcal{T})$，y 的颜色 $c(y)$ 是 y 的支撑集中的某个指数，那么我们称这个着色是**合适的（proper）**。

单纯形的着色

定义说起来有些拗口，我们以三角形为例进行理解。三角形事实上是单纯形 $S=\langle\langle x^0,x^1,x^2\rangle\rangle$，根据合适着色的要求，$x^0$ 的支撑是 $\{0\}$，x^1 的支撑是 $\{1\}$，x^2 的支撑是 $\{2\}$，因此合适的着色是将 x^0 着色为 0，x^1 着色为 1，x^2 着色为 2。除此之外，位于 x^0 和 x^1 之间的点 x^3 的支撑是 $\{0,1\}$，因此它的着色可以是 0 或 1，但不能是 2，其余同理；而位于三角形内部的点的支撑是 $\{0,1,2\}$，因此它的着色可以是 0,1,2 中的任意一个。我们给出一个例子：

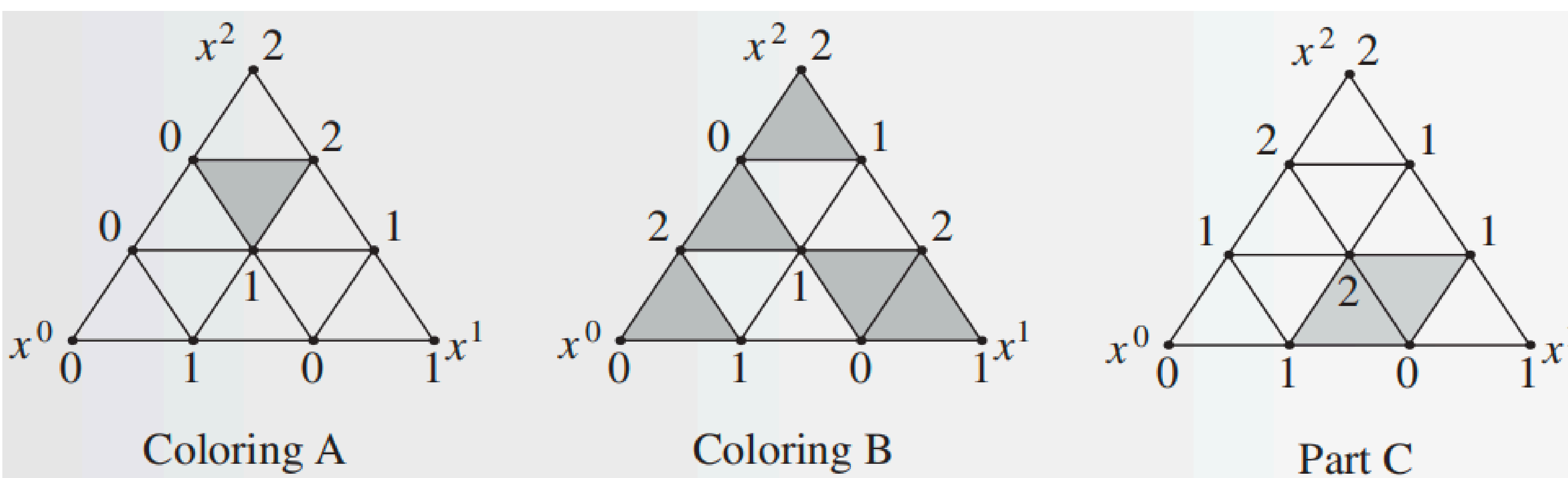


单纯形的着色

图中的 A 和 B 都是合适的着色，但 C 不是，因为箭头指向的点着色了 1，但这个点的支撑 x^0 和 x^2 的着色分别是 0 和 2。进一步地，我们可以定义完美着色的概念：

定义

令 $\mathcal{T}$ 是 S 的一个划分，c 是 $\mathcal{T}$ 的一个合适着色。k 维单纯形 $T \in \mathcal{T}$ 是**完美着色的（perfectly colored）**，如果 T 的 $k+1$ 个顶点被 $k+1$ 种不同的颜色着色。



上图中每种着色中，完美着色的 k 维单纯形都被填充了灰色，我们发现合适的着色 A 和 B 中完美着色的 k 维单纯形有奇数个，而 C 表明不合适的着色中完美着色的 k 维单纯形可能出现偶数个。推广之后就是 Sperner（斯佩纳）引理的内容：

Sperner 引理

令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k\rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，对于 $n \geqslant k$，令 $\mathcal{T}$ 是 S 的一个划分。如果 c 是 $\mathcal{T}$ 的一个合适着色，那么完美着色 k 维单纯形 $T \in \mathcal{T}$ 的个数是奇数。特别地，$\mathcal{T}$ 中至少有一个完美着色的 k 维单纯形。

接下来将证明 Sperner 定理，主要思路是根据单纯形的维数 k 使用数学归纳法，总共分为五步。

Sperner 引理的证明

第一步：$k = 0$ 的情况：此时单纯形只包含一个点，显然成立。

第二步：$k > 0$ 时，定义三类单纯形的集合

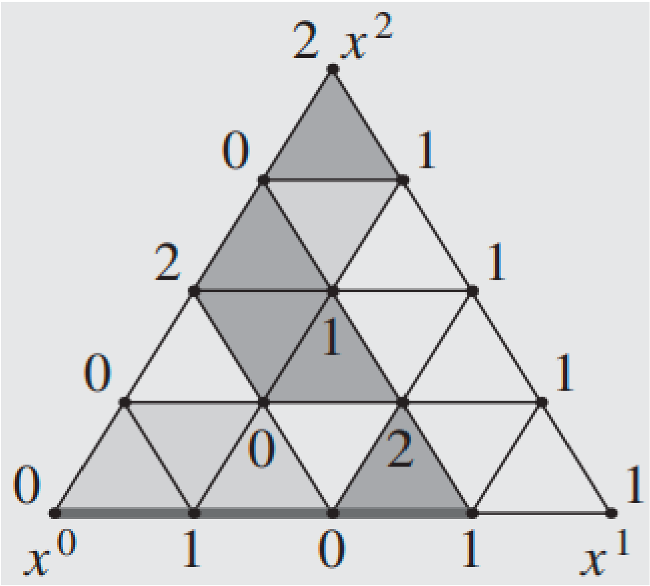
假定定理对每个 $k-1$ 维单纯形都成立，令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k \rangle\rangle$ 是一个 k 维单纯形，$\mathcal{T}$ 是 S 的一个划分，c 是 $\mathcal{T}$ 的一个合适着色。我们定义如下三类单纯形集合：

- $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有的被包含在 S 的边界内并被 $\{0, 1, ..., k-1\}$ 着色的 $k-1$ 维单纯形；
- $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有被 $\{0, 1, ..., k-1\}$ 着色的 k 维单纯形，也就是说有两个节点被相同的颜色着色；
- $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有被 $\{0, 1, ..., k\}$ 着色的 k 维单纯形。

定义这几类单纯形集合的作用在之后就会看到，在那时回过头来看，这里的定义是非常巧妙的。

Sperner 引理的证明

下面来看一个例子：



上图中，$\mathcal{A}$ 是三角形边界上被 $\{0,1\}$ 染色的线段，被加粗表示；$\mathcal{B}$ 是被 $\{0,1\}$ 染色的小三角形，用浅色阴影表示；$\mathcal{C}$ 是被 $\{0,1,2\}$ 染色的小三角形，用深色阴影表示。可以看到，$\mathcal{A}$ 中的线段有 3 个，$\mathcal{B}$ 中的小三角形有 4 个，$\mathcal{C}$ 中的小三角形有 5 个。

Sperner 引理的证明

第三步：证明 $\mathcal{A}$ 中的线段数是奇数

由于 $\mathcal{A}$ 中的线段是 $k-1$ 维单纯形，且被 $\{0,1,\dots,k-1\}$ 着色，根据归纳假设，$\mathcal{A}$ 中的线段数是奇数。

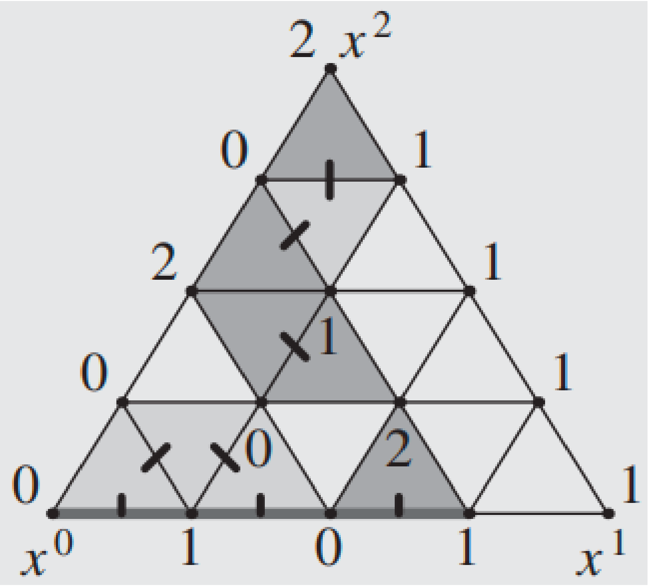
第四步：构建连接单纯形之间的图

定义无向图如下：

- 节点集为 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$，即 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 中的每个单纯形都是图上的一个节点；
- 令 T_1,T_2 是 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 中两个不同的单纯形，当且仅当 $T_1\cap T_2$ 是由 $\{0,1,\dots,k-1\}$ 着色的 $k-1$ 维单纯形时，T_1 和 T_2 之间有一条边。

Sperner 引理的证明

下图给出了一个如此定义的无向图的实例，其中短线就代表着单纯形之间的边：



Sperner 引理的证明

第五步：分析图的性质，得到最终结论

最后分析这个图中从 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 出发的边数，从而得出结论：

- 从 $\mathcal{A}$ 中每个节点出发，到 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{C}$ 的边有且仅有一条：由于 $\mathcal{A}$ 中每个节点根据定义都在边界上，因此只能在唯一的 k 维单纯形中；因为 $\mathcal{A}$ 中每个节点已经有 $k-1$ 个颜色，因此 $\mathcal{A}$ 中每个节点所在的 k 维单纯形一定包含于 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{C}$ 中，因此相连的边有且仅有一条；

Sperner 引理的证明

- 从 $\mathcal{B}$ 中每个节点出发，到 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{C}$ 的边有且仅有两条：因为 $\mathcal{B}$ 中的每个节点都被 $\{0,1,...,k-1\}$ 着色，因此有且仅有两个 $k-1$ 维子单纯形（或者说面）被 $\{0,1,...,k-1\}$ 着色（因为有一种颜色被两个顶点使用，其余颜色都是一一对应）；
  - 如果这样的 $k-1$ 维单纯形在边界上，那么符合 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 相连的条件，因此有一条边；
  - 如果这样的 $k-1$ 维单纯形在内部，这样的单纯形包含于两个 k 维单纯形，并且因为这个 $k-1$ 维单纯形已经使用了 $\{0,1,...,k-1\}$，因此这两个 k 维单纯形一个在 $\mathcal{B}$ 中（因为现在探讨的是 $\mathcal{B}$ 中每个节点出发的情况），令一个在 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{C}$ 中，也是有一条边连接的；
  - 因此这样的 $k-1$ 维单纯形无论如何都会带来一条边的连接，而我们有两个这样的单纯形，因此有两条边；

Sperner 引理的证明

- 从 $\mathcal{C}$ 中每个节点出发，到 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 的边有且仅有一条：因为 $\mathcal{C}$ 中的每个节点都被 $\{0,1,...,k\}$ 着色，因此有且仅有一个 $k-1$ 维子单纯形被 $\{0,1,...,k-1\}$ 着色（因为此时点和颜色一一对应），根据和 $\mathcal{B}$ 类似的讨论即可得到结论。

事实上，从图中所有节点出发的边的总数等于边的数量 R 的两倍，因为每条边都被数了两次，这意味着

$$2R = |\mathcal{A}| + 2|\mathcal{B}| + |\mathcal{C}|$$

因此等号右边是偶数，而 $|\mathcal{A}|$ 是奇数，因此 $|\mathcal{C}|$ 也是奇数，注意 $\mathcal{C}$ 的定义就是完美着色的 k 维单纯形的集合，斯佩纳引理得证。

Sperner 引理的证明

不得不承认证明看完有一种不知道怎么就证出来的感觉。回过头体会会发现其中构造都非常的精妙，**整体而言就是分了三类单纯形，构造了一种特殊的图，第一类数量可以用归纳假设，第二类图中产生边数为偶数，第三类是目标，数量根据奇偶性分析直接可以得到**，或许这就是奇妙的组合学吧！

单纯形划分的进一步性质

接下来的内容将会在之后的证明中用到，在此简单介绍：

定义

令 $S = \langle\langle x^0, x^1, ..., x^k\rangle\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形，对于 $n \geqslant k$，令 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, ..., T_M\}$ 是 S 的一个划分。S 的**直径（diameter）**定义为

$$\rho(S) = \max_{i,j} \|x^i - x^j\|$$

其中 i, j 遍历 $0, 1, ..., k$。即单纯形的直径是最远顶点间的距离，事实上也是单纯形内任意两点最大距离（注意到单纯形是凸集）。进一步地，$\mathcal{T}$ 的**直径（diameter）**定义为

$$\rho(\mathcal{T}) = \max_{m=1,2,...,M} \rho(T_m)$$

也就是说，单纯形划分的直径是划分中最大的单纯形的直径。

单纯形划分的进一步性质

下面的定理表明，每个单纯形划分都可以"加细"，或者说被精炼为具有更小直径的划分，证明太过技术性，略去：

定理

令 $k \geqslant 1$，$\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维单纯形 $S = \langle\langle x^0, x^1, \ldots, x^k \rangle\rangle$ 的一个划分。那么存在 S 的一个划分 $\mathcal{T}'$，满足如下要求：

1. 对每个 $T' \in \mathcal{T}'$，都存在 $T \in \mathcal{T}$，使得 $T \subseteq T'$；
2. $\rho(\mathcal{T}') \leqslant \frac{k}{k+1}\rho(\mathcal{T})$。

反复运用上述定理即可得到如下推论，之后我们会默认熟知这一结果推导其他结果：

推论

对每个单纯形 S 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个划分 $\mathcal{T}_\varepsilon$，使得 $\rho(\mathcal{T}_\varepsilon) < \varepsilon$。

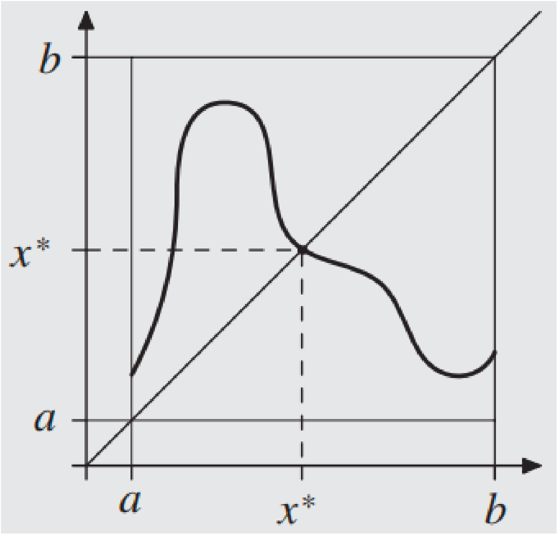
CONTENT

目录

Brouwer 不动点定理

Brouwer（布劳威尔）不动点定理

令 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空凸紧集，$f: X \to X$ 是一个连续映射，那么 f 至少有一个不动点。即存在 $x \in X$，使得 $f(x) = x$。



左图给出了定理在 $n = 1$ 时的例子，显然 $[a, b] \to [a, b]$ 的连续映射无论怎么画都会和 $i(x) = x$ 相交。

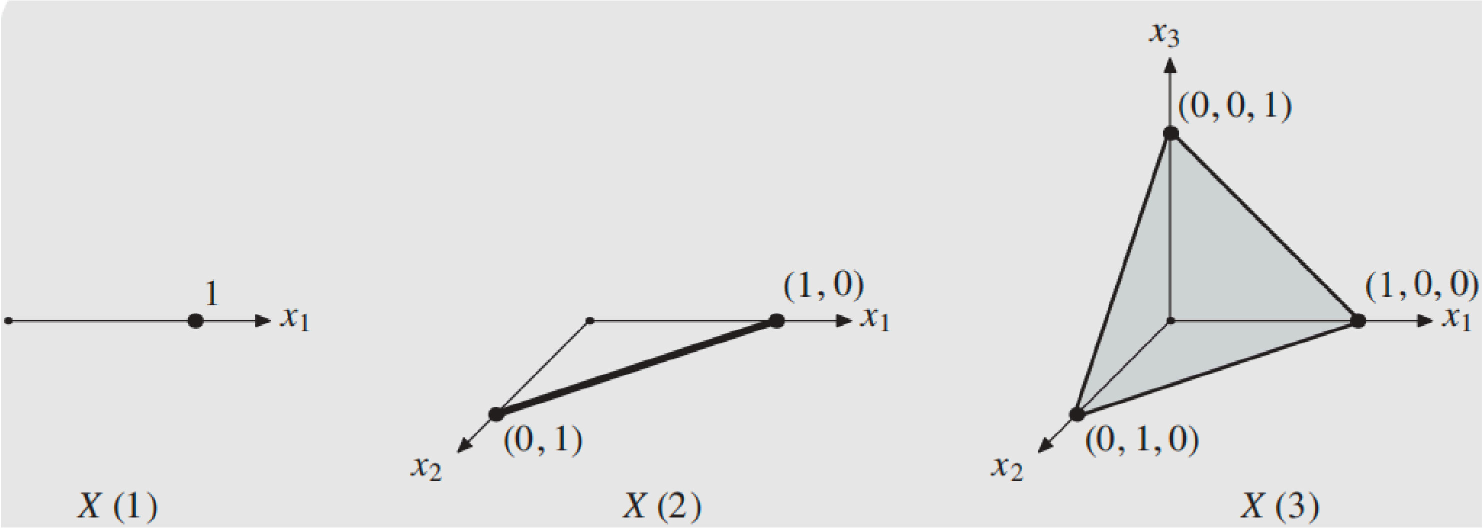
对于二维的情况，一个例子是如果你把世界地图平铺在地面上，那么一定存在地面上的一个点，与其上方地图上的一个点代表同一位置。或者更生活化地，大商场等地方可以看到的平面地图，上面标有“您在此处”的红点。如果标注足够精确，那么这个点就是把实际地形射到地图的连续函数的不动点。

特殊情况的证明

为了证明这一定理的一般情况，我们首先证明一个特殊情况，即 X 是**标准单纯形（standard simplex）**的情况。$n-1$ 维标准单纯形 $X(n)$ 定义如下：

$$X(n)=\left\{x\in\mathbb{R}^n: x_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$$

下图给出了三个最简单的标准单纯形，不能看出 $n-1$ 维标准单纯形就是顶点为 $e_1,\ldots,e_n$（自然基）的单纯形。



特殊情况的证明

首先证明如下特殊情况：

命题

令 $f: X(n) \to X(n)$ 是一个连续映射，那么 f 至少有一个不动点。

在定理的证明中，我们需要用到 $\mathbb{R}^n$ 的**上范数（sup-norm）**：对于 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$$

特殊情况的证明

接下来将开始证明这一特殊情况，证明分为三步。首先注意到，对任意的 $y \in X(n)$，都有 $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$，其中 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然基。于是 y 的支撑 $\text{supp}_{X(n)}(y) = \{i : y_i > 0\}$。

第一步：对每个 $\boldsymbol{y \in X(n)}$，存在 $\boldsymbol{i \in \text{supp}_{X(n)}(y)}$ 满足 $\boldsymbol{f_i(y) \leqslant y_i}$

根据 $f : X(n) \to X(n)$ 可知 $\sum_{i=1}^{n} f_i(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ 且 $f_i(y) \geqslant 0$，反证法，假设对每个 $i \in \text{supp}_{X(n)}(y)$ 都有 $f_i(y) > y_i$，而我们知道对每个 $i \notin \text{supp}_{X(n)}(y)$，$f_i(y) \geqslant 0 = y_i$，因此此时有 $\sum_{i=1}^{n} f_i(y) > \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$，与 f 是 $X(n)$ 到 $X(n)$ 的映射矛盾。

特殊情况的证明

第二步：定义一个着色

因为紧集上的连续函数都是一致连续的，因此对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $x, y \in X(n)$，只要 $\|x - y\|_\infty < \delta$，就有 $\|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$。从而我们定义 $X(n)$ 的划分 $\mathcal{T}_\varepsilon$，使得对于任意的 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$，$\rho(T_\varepsilon) < \delta$。为了之后讨论的方便，这里的 δ 我们都取小于等于 ε 的值。

定义一个着色 c，使得对每个 $x \in Y(\mathcal{T}_\varepsilon)$，$c(x) = i$ 当且仅当 $i \in \operatorname{supp}_{X(n)}(x)$ 且 $f_i(x) \leqslant x_i$。根据第一步的讨论，这样的 i 一定存在，并且这个着色是合适的，因为 $c(x)$ 取的是 x 的支撑集中的某个指数。根据 Sperner 引理，我们知道至少有一个完美着色的 $n-1$ 维单纯形 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$。

第三步：不动点的存在性

设这个完美着色的单纯形为 $T_\varepsilon = \langle\langle x^1, x^2, ..., x^n \rangle\rangle$，其所有节点被 $\{1, 2, ..., n\}$ 着色，不妨设 $c(x^i) = i$，即 $f_i(x^i) \leqslant x_i^i$ 成立（x_i^i 是 x^i 的第 i 个坐标）。令 x^ε 是 T_ε 中的一个向量，因为 $\rho(T_\varepsilon) < \delta$，这意味着 $\|x^\varepsilon - x^i\|_\infty < \delta$ 对每个 i 都成立，因此根据 f 的一致连续性，有

$$f_i(x^\varepsilon) \leqslant f_i(x^i) + \varepsilon \leqslant x_i^i + \varepsilon \leqslant x_i^\varepsilon + \varepsilon + \delta \leqslant x_i^\varepsilon + 2\varepsilon, \forall i \in [n]$$

上式对于任意的 ε 都成立，因此存在点列 $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$，使得

$$f_i(x^\varepsilon) \leqslant x_i^\varepsilon + 2\varepsilon$$

对每个 i 都成立。根据 $X(n)$ 的紧性，存在一个收敛的子列 $\{x^{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty$，收敛到一个点 $x^* \in X(n)$。根据 f 的连续性，对上式取极限，有 $f_i(x^*) \leqslant x_i^*, \forall i \in [n]$。

特殊情况的证明

回忆 $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^*) = 1$，因此有 $f_i(x^*) = x_i^*, \forall i \in [n]$，从而 $f(x^*) = x^*$，即 f 至少有一个不动点。

事实上，任何一个 k 维单纯形 S 都等价于标准单纯形 $X(k+1)$（只需要将顶点一一对应后，使用重心坐标即可，不影响我们上面的证明），所以这一定理对任意的单纯形也都是成立的。总结一下上述证明，核心在于构造了一个合适的着色，然后利用 Sperner 引理得到了一个完美着色的单纯形，最后通过一致连续性和紧性得到了不动点的存在性，事实上最终的不动点就是一个极限点。

一般情况的证明

接下来需要将布劳威尔不动点定理推广到一般的凸紧集的情况，我们需要首先证明如下引理：

引理

令 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空凸紧集，定义函数 $g:\mathbb{R}^n \to X$，使得 $g(x)$ 是 X 中距离 x 最近的点。那么 $d(g(x), g(y)) \leqslant d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$。

回忆对于闭凸集 X 而言，对于 $x \notin X$，存在唯一的 $y \in X$，使得 $d(x, y) = d(x, X)$，这个 y 就是 $g(x)$，即 g 是良定义的。这一引理表明，g 是一个 Lipschitz 连续的映射，因此也是连续的。

一般情况的证明

证明: 回忆分离超平面定理，对于 $x \notin X$，设 y 是 X 中距离 x 最近的点，z 是 X 中任一点，则有 $\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$。代入引理的符号，有 $\langle x-g(x), g(y)-g(x)\rangle \leqslant 0$，同理有 $\langle y-g(y), g(x)-g(y)\rangle \leqslant 0$，两式相加得到

$$\langle (g(y)-g(x))-(y-x), g(y)-g(x)\rangle \leqslant 0$$

从而有 $\|g(y)-g(x)\|^2 \leqslant \langle g(y)-g(x), y-x\rangle \leqslant \|g(y)-g(x)\|\|y-x\|$（第二个不等号使用了柯西-施瓦茨不等式），即 $\|g(y)-g(x)\| \leqslant \|y-x\|$，即 g 是 Lipschitz 连续的。 $\square$

一般情况的证明

在做好一切准备工作后，我们就可以开始证明最终的定理了:

证明: 因为 X 是紧集，因此存在一个足够大的单纯形 S 包含 X。定义函数 $h: S \to S$ 满足 $h(x) = f(g(x))$，其中 g 是引理中定义的函数。根据引理，g 是连续函数，又 f 也是连续函数，因此 h 是连续的，因此根据特殊情况的证明，h 至少有一个不动点 $x^* \in S$，即 $f(g(x^*)) = h(x^*) = x^*$。注意到函数 h 的实际值域是 f 的值域，因此包含于 X，因此 $x^* \in X$，因此根据定义 $g(x^*) = x^*$，因此 $f(x^*) = x^*$，即 f 至少有一个不动点。 $\square$

相关历史

布劳威尔不动点定理是代数拓扑的早期成就，还是更多更一般的不动点定理的基础，在泛函分析中尤其重要。在 1904 年，首先由 Piers Bohl 证明 $n = 3$ 的情况。后来在 1909 年，鲁伊兹·布劳威尔（L. E. J. Brouwer）再次证明。在 1910 年，雅克·阿达马提供一般情况的证明，而布劳威尔在 1912 年提出另一个不同的证明。这些早期的证明皆属于非构造性的间接证明，与数学直觉主义理想矛盾。直到 1967 年，美国数学家 H. E. Scarf 找到了计算单纯形连续映射不动点的组合拓扑有限算法，这也就是 Brouwer 不动点定理的构造性证明。我们从 Sperner 引理出发的证明来源于 Kuhn（1960）。

Brouwer 不动点定理的推广

首先考虑一个简单的推广：$f: X \to X$ 中的 X 不再强制要求是凸紧集，可以只是一个同胚于一个凸紧集的紧集。那么布劳威尔不动点定理是否仍然成立呢?

答案是成立的，设 $g: X \to S$ 是同胚映射，其中 S 是凸紧集，构造 $h: S \to S$ 满足 $h(x) = g(f(g^{-1}(x)))$，根据同胚的要求以及布劳威尔不动点定理，h 存在不动点 $x^* \in S$，即 $g(f(g^{-1}(x^*))) = x^*$，因此 $f(g^{-1}(x^*)) = g^{-1}(x^*)$，因此 f 至少有一个不动点 $g^{-1}(x^*)$。

Brouwer 不动点定理在无限维空间中的推广是**邵德尔（Schauder）不动点定理**，即每一个从一个巴拿赫空间（即完备的赋范线性空间）的某个给定的凸紧子集映射到它自身的紧算子都有（至少）一个不动点。

纳什定理的证明

接下来我们将应用布劳威尔不动点定理证明纳什定理：

纳什定理

对于任意一个策略式博弈 $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$，如果参与人的个数有限，每个参与人的策略集是有限的，那么必然存在一个混合策略纳什均衡。

设 G 的混合扩展为 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$，且 $|S_i| = m_i$。

纳什定理的证明

为了接下来的证明，我们不加说明地给出两个很简单的结论：

引理

1. 如果参与人 i 的纯策略集是有限的，那么参与人 i 的混合策略集 Σ_i 是凸紧的（事实上是单纯形，顶点是所有可能的纯策略向量）；
2. 如果 $A \subset \mathbb{R}^n$ 和 $B \subset \mathbb{R}^m$ 都是凸（紧）集，那么 $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 也是凸（紧）的。

综合引理的两个结论可知，集合 $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$ 是凸紧的，因此接下来我们的整体思路是：构造 $f : \Sigma \to \Sigma$，使得 f 是一个连续映射，然后根据布劳威尔不动点定理，证明 f 至少有一个不动点，并且这个不动点恰好是一个混合策略纳什均衡。

纳什定理的证明

定理的正式证明将在逐步分析后得到，因为这里 f 的构造需要逐步分析才更好理解背后的含义。事实上，因为 $f : \Sigma \to \Sigma$，所以 f 将一组混合策略映射到另一组混合策略。如果 Σ 不是混合策略纳什均衡，那么存在一个参与人 i，σ_i 不是 σ_{-i} 的最佳应对，故可以令 $f_i(\sigma)$ 为参与人 i 比 σ_i 更优的对 σ_{-i} 的应对，即一个向着均衡方向的改进。这样的定义思想使得，σ 是混合策略纳什均衡当且仅当 $f(\sigma) = \sigma$，因为此时每个人都已经处于最优应对了。

以上只是一些想法，要真的定义出这个 f，我们首先需要一个辅助函数 $g_i^j : \sigma \to [0, +\infty)$，满足

$$g_i^j(\sigma) = \max\left\{0, U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)\right\}$$

纳什定理的证明

也就是说，g_i^j 是参与人 i 从 σ_i 转向纯策略 s_i^j 带来的收益。如果收益大于零则为收益，否则为零。一个很显然的结论是，当且仅当 $\forall i, j$ 都有 $g_i^j(\sigma) = 0$ 时，σ 是混合策略纳什均衡，因为纳什均衡是最优反应。

现在我们可以定义 f，使其符合我们之前讨论的直观：当 σ 不是均衡时，$f_i(\sigma)$ 能转向更优反应。因为 $f(\sigma)$ 仍然是混合策略向量，故记 $f_i^j(\sigma)$ 为取值 σ 时，参与人 i 选择纯策略 s_i^j 的概率。事实上如果 σ_i 不是 σ_{-i} 的最优应对，那么我们应当将 i 选择更优的纯策略的概率增大，因此我们可以令

$$f_i^j(\sigma) = \frac{\sigma_i\left(s_i^j\right) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}$$

纳什定理的证明

这非常符合我们的直观，并且分母上的值也使得 $\sum_{j=1}^{m_i} f_i^j(\sigma) = 1$，即 $f_i(\sigma)$ 仍然是一个混合策略，即的确满足 $f: \Sigma \to \Sigma$。除此之外，我们知道 U_i 都是连续函数（因为是多重线性函数），g 是两个连续函数的最大值，因此也是连续函数，而 f 的分母一定大于 0，因此 f 也是连续函数，根据布劳威尔不动点定理，f 至少有一个不动点，即存在 $\sigma^* \in \Sigma$，使得 $f(\sigma^*) = \sigma^*$，即

$$f_i^j(\sigma^*) = \sigma_i^*\left(s_i^j\right) = \frac{\sigma_i^*\left(s_i^j\right) + g_i^j(\sigma^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma^*)},$$

整理得到

$$g_i^j(\sigma) = \sigma_i\left(s_i^j\right) \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma), \forall i \in N, j \in [m_i]$$

纳什定理的证明

下面证明不动点的确是一个混合策略纳什均衡。使用反证法，假设这一不动点 σ^* 不是混合策略纳什均衡，那么必定存在一个参与人 i 以及 $l \in [m_i]$ 使得 $g_i^l(\sigma) > 0$。特别地，$\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma) > 0$，因此根据上式我们得到

$$\sigma_i\left(s_i^j\right) > 0 \Leftrightarrow g_i^j(\sigma) > 0, \forall j \in [m_i]$$

因为 U_i 是多线性的，因此 $U_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i\left(s_i^j\right) U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right)$，这意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i^*\left(s_i^j\right)\left(U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma^*)\right) \\ &= \sum_{j:\sigma_i\left(s_i^j\right)>0} \sigma_i^*\left(s_i^j\right)\left(U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma^*)\right) = \sum_{j:\sigma_i\left(s_i^j\right)>0} \sigma_i^*\left(s_i^j\right) g_i^j(\sigma) \end{aligned}$$

然而我们知道 $g_i^l(\sigma) > 0$，根据上页的等价关系有 $\sigma_i^*\left(s_i^l\right) > 0$，因此上式的和大于 0，这与 0 的等式矛盾，因此假设不成立，σ^* 是一个混合策略纳什均衡。

由此我们便证明了纳什均衡的存在性。事实上这一证明非常美丽，对 f 的构造也非常优雅美观，因此这一证明值得重视。接下来我们讨论纳什定理的一个拓展，因为有时候存在约束使得参与人 i 无法选择整个 σ_i，例如要求选择某个纯策略的概率必须大于等于一个值。在这样的情况下，约束条件可以转化为线性不等式，而有限数目的半空间相交得到的有界集合称为**多面体（polytope）**。事实上多面体可以视为其顶点的凸包，只是这些顶点不一定仿射无关（这是单纯形的要求）了，例如四边形不是单纯形，但是是多面体。

纳什定理的证明

事实上，当参与人的策略空间是多面体时，纳什定理也成立:

推论

令 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$ 是一个策略式博弈，对每个参与人 i，集合 Σ_i 是 $\mathbb{R}^{d_i}$ 上的一个多面体，U_i 是多重线性函数，那么 Γ 至少有一个混合策略纳什均衡。

具体证明略去，事实上就是将多面体的顶点都视为纯策略，定义一个辅助的博弈即可。

KKM 定理是拓扑学中的重要定理，是根据最早证明它的三位数学家的名字（Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz）命名的。KKM 定理实际上与 Brouwer 不动点定理等价，具体证明略去，仅介绍结论供读者了解。

KKM 定理

令 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是 $X(n)$ 的紧子集，满足

1. 并集是 $X(n)$，即 $\bigcup_{i=1}^n X_i = X(n)$；
2. 对于每个 $i \in [n]$，$X_i \supseteq \{x = (x_1, ..., x_n) \in X(n) : x_i = 0\}$。

那么它们的交集非空：$\bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$。

CONTENT

目录

背景

Kakutani（角谷）不动点定理是由日本数学家角谷静夫提出的，它是布劳威尔不动点定理的一个推广，也是一个非常重要的不动点定理：在纳什本人的论文中，纳什定理的证明首先使用了布劳威尔不动点定理，之后的版本则在大卫·盖尔（David Gale）的建议下使用了更简单的角谷不动点定理。

事实上，提到角谷静夫，最令人熟知的可能是著名的 $3n+1$ 猜想，即角谷猜想（事实上并不是他提出的，但因为他也对这一问题投入了研究所以也冠以他的名字），这个猜想是一个非常有趣且至今未被证明的数学问题，它的描述如下：对于每一个正整数，如果它是奇数，则对它乘 3 再加 1，如果它是偶数，则对它除以 2，如此循环，最终都能够得到 1。

角谷不动点定理描述的是所谓的“集值函数”，定义如下：

定义

一个从集合 X 到 Y 的对应（**correspondence**）$\Gamma : X \to 2^Y$ 将每一 $x \in X$ 映射到集合 $\Gamma(x) \subseteq Y$。

上述 2^Y 表示 Y 的幂集。如果对每一 $x \in X$，$\Gamma(x)$ 中都有且仅有一个元素，则 Γ 就是通常的函数。为了讨论对应的性质，需要引入图形的概念：

定义

一个对应 $\Gamma : X \to 2^Y$ 的图形（**graph**）是集合 $\{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}$。如果对于任何 X 中的序列 $x^m \to x \in X$ 和满足 $y^m \in \Gamma(x^m)$ 的序列 $\{y^m\}$，存在一个子序列的极限点 $y \in \Gamma(x)$，则称 Γ 有一个闭图（**closed graph**）。

半连续性

闭图的概念应用在函数上显然就是连续函数的等价条件，在对应上需要修正，得到**半连续性（hemicontinuous）**的概念：

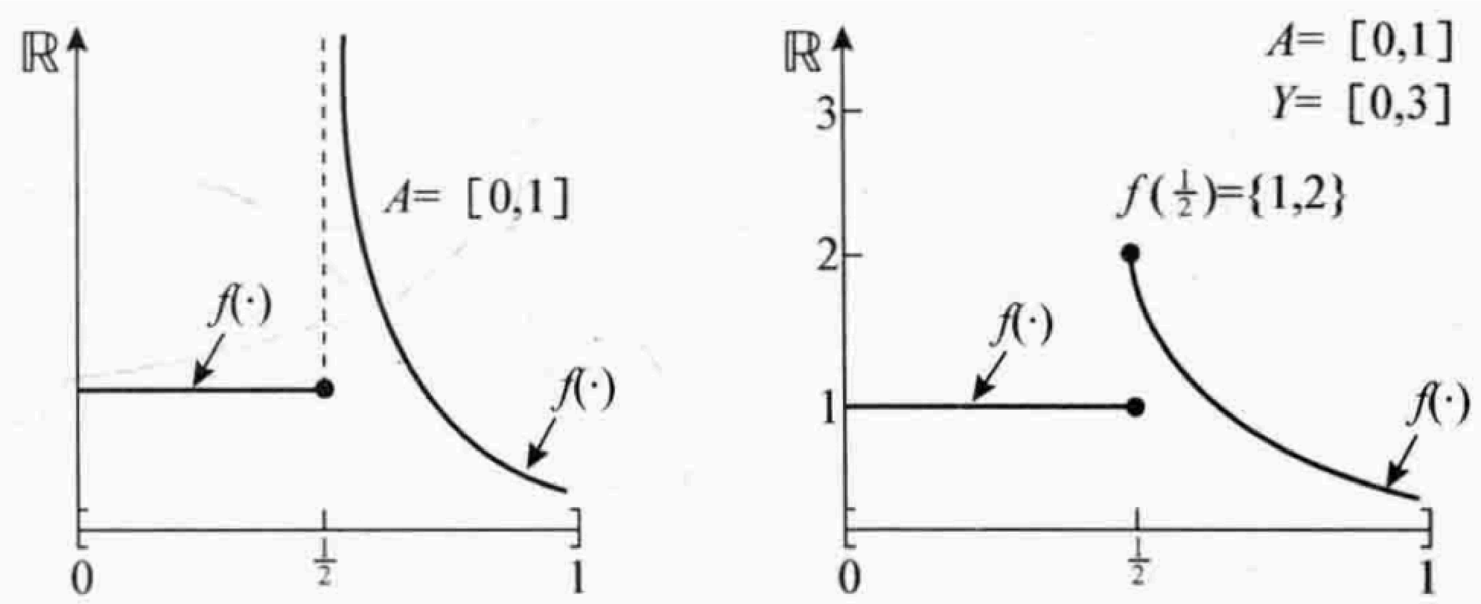
定义

给定集合 X 和闭集 Y，考虑对应 $\Gamma : X \to 2^Y$。如果该对应有一个闭图而且紧集的像都是有界的，也就是说，对于每个紧集 $Z \subset X$，集合 $\Gamma(Z) = \{y \in Y : y \in \Gamma(x)$ **对于某个** $x \in Z\}$ 是有界的，则该对应 $f : X \to 2^Y$ 是**上半连续的（upper hemicontinuous，UHC）**。

在很多情形下，Γ 的值域空间 Y 本身也是紧的。在这种情形下，上半连续性就简化为闭图条件。

半连续性

下图给出了不满足和满足上半连续性的例子，由此也可以看出对应的半连续性和函数的连续性之间的差别。



(a) 中的对应有闭图，但该对应不是上半连续的

(b) 中的对应是上半连续的

半连续性

定义

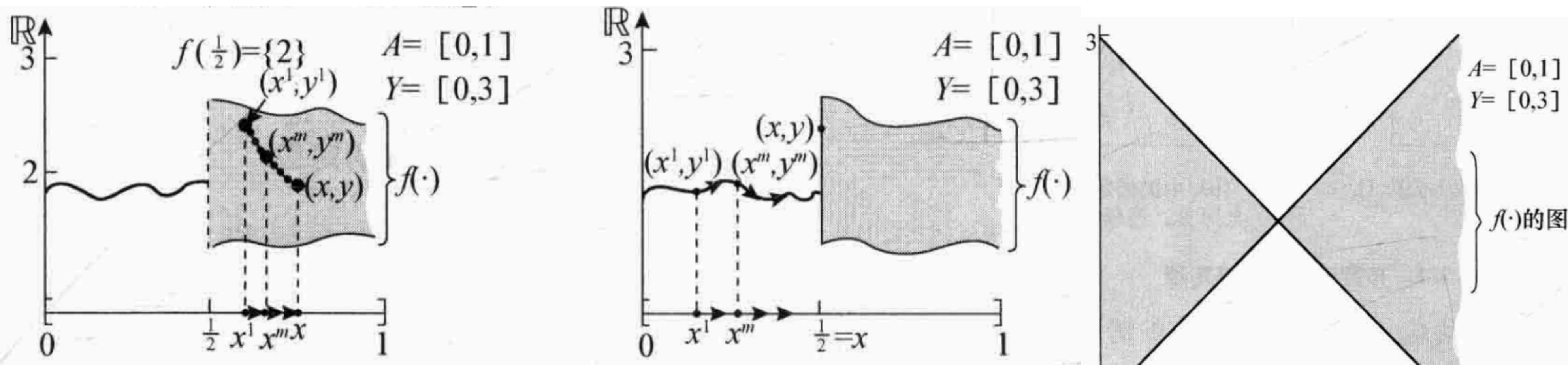
给定集合 X 和 Y，考虑对应 $\Gamma : X \to 2^Y$。如果对于 X 中每个序列 $x^m \to x \in X$ 和每个 $y \in \Gamma(x)$，我们都可以找到一个序列 $y^m \to y$ 和一个整数 M，使得 $y^m \in f(x^m)$ 对于所有 $m > M$ 成立，则该对应 $\Gamma : X \to 2^Y$ 是**下半连续的（lower hemicontinuous，LHC）**。

与上半连续的对应类似，若 Γ 是个函数，则作为对应的 Γ 的下半连续性概念，与作为函数的 Γ 的连续性概念是相同的。

最后，当一个对应既是上半连续的又是下半连续的时，我们说它是**连续的(continuous)**。

半连续性

下图（a）的对应不是上半连续的，因为它没有闭图。（b）中的对应是上半连续的，但不是下半连续的：考虑图中由下方趋近于 x 的序列 $x^m \to x$ 和点 $y \in f(x)$。大致来说，上半连续性只与集合“向外爆炸扩大式”（explosions）的不连续性相容（图（b）中的 $x = \frac{1}{2}$ 处），而下半连续只与集合“向内爆炸收缩式”（implosions）的不连续性相容（图（a）中的 $x = \frac{1}{2}$ 处）。右图给出了连续对应的例子。这个知乎回答也给出了半连续性的一些直观。



（a）中的对应是下半连续的，但不是上半连续的

（b）中的对应是上半连续的，但不是下半连续的

Kakutani 不动点定理

定理

令 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空凸紧集，$F: X \to 2^X$ 是一个上半连续对应，满足对每个 $x \in X$，$F(x)$ 是非空闭凸集，那么 F 至少有一个不动点，即存在 $x^* \in X$，使得 $x^* \in F(x^*)$。

有无穷多个不动点的函数

例如：函数 $\phi(x) = [1 - \frac{x}{2}, 1 - \frac{x}{4}]$ 满足所有角谷不动点定理的条件，并存在无穷多个不动点。

有一个不动点的函数

例如：一个函数 $\phi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 \leqslant x < 0.5 \\ [0,1] & x = 0.5 \\ \frac{1}{4} & 0.5 < x \leqslant 1 \end{cases}$ 满足所有角谷不动点定理的条件，存在唯一一个不动点 $x = 0.5$。

Kakutani 不动点定理

不满足凸集的函数

例如：一个函数 $\phi(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & 0\leqslant x<0.5\\ \{\frac{3}{4},\frac{1}{4}\} & x=0.5\\ \frac{1}{4} & 0.5<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=0.5$ 处不满足凸集定义，但满足其他角谷不动点定理的条件。这个函数没有不动点。

不满足闭图的函数

例如：一个函数 $\phi(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & 0\leqslant x<0.5\\ \frac{1}{4} & 0.5\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 不存在不动点，因为函数不满足闭图像。考虑序列 $x_n=0.5-\frac{1}{n}$ 和 $y_n=\frac{3}{4}$：当 $x_n\to x=0.5, y_n\to y=\frac{3}{4}, y\notin\phi(x)$。

Kakutani 不动点定理

事实上角谷不动点定理是布劳威尔不动点定理的推广：取 $F(x) = \{f(x)\}$，那么角谷不动点定理就是布劳威尔不动点定理。为了证明角谷不动点定理，我们需要首先给出一些定义，然后证明一个引理。对 $\mathbb{R}^n$ 中的每个子集 A，以及任意的 $\varepsilon > 0$，用 $B(A, \varepsilon)$ 表示 A 的 ε-邻域，即 $B(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \varepsilon\}$。

显然，如果 A 是凸集，那么 $B(A, \varepsilon)$ 也是凸集。下面的引理说的是，对上半连续对应 F，如果 x “接近于” x_0，那么 $F(x)$ “接近于” $F(x^0)$：

引理

令 $F : X \to 2^X$ 是上半连续对应（X 是凸紧集），对每个 $x^0 \in X$ 和任意的 ε，都存在 $\delta > 0$ 使得 $F(x) \subseteq B(F(x^0), \varepsilon)$ 对所有满足 $d(x, x^0) \leqslant \delta$ 的 $x \in X$ 成立。

Kakutani 不动点定理

证明：使用反证法：假设存在 $x^0 \in X$ 和 ε，对任意的 $\delta > 0$，都存在 $x^\delta \in X$ 满足 $d(x^\delta, x^0) \leqslant \delta$，存在 $y^\delta \in F(x^\delta)$，使得 $d(y^\delta, F(x^0)) > \varepsilon$ 成立。因为 X 是紧集，可以取 (x^δ) 和 (y^δ) 的收敛子列 $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$，满足

1. $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$，因为 $\delta \to 0$；
2. $y^k \in F(x^k)$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立，极限 $\hat{y} = \lim_{k\to\infty} y^k$ 存在；
3. $d(y^k, F(x^0)) > \varepsilon$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。

根据 1、2 以及 F 有闭图可知，$\hat{y} \in F(x^0)$，但是 $d(\hat{y}, F(x^0)) \geqslant \varepsilon$，矛盾。 $\square$

Kakutani 不动点定理

接下来可以开始证明角谷不动点定理，证明的大致思路是，构造一个 $X \to X$ 的连续函数序列 $(f^m)_{m\in\mathbb{N}}$，利用布劳威尔不动点定理，这个序列的每个函数都有一个不动点，然后证明这些不动点的极限点就是 F 的不动点。

第一步：定义连续函数的序列

对每个 $m \in \mathbb{N}$，定义 $f^m : X \to X$。因为 X 是紧集，故可以被有限个开球覆盖（假设 K^m 个），每个开球的半径为 $\frac{1}{m}$。用 $(x_k^m)_{k=1}^{K_m}$ 表示这些球的中心，那么对任意的 $x \in X$，都存在 k 使得 $d(x, x_k^m) < \frac{1}{m}$。对每个 $k \in [K_m]$，选择 $y_k^m \in F(x_k^m)$。用 C_k^m 表示与 x_k^m 距离至少为 $\frac{1}{m}$ 的点集：

$$C_k^m = \left\{x \in X : d(x, x_k^m) \geqslant \frac{1}{m}\right\}$$

Kakutani 不动点定理

这意味着 $d(x, x_k^m) < \frac{1}{m}$ 当且仅当 $x \notin C_k^m$。因为 C_k^m 是闭集，这当且仅当 $d(x, C_k^m) > 0$ 才能发生。对每个 $x \in X$ 和每个 $k \in [K_m]$，定义

$$\lambda_k^m(x) = \frac{d(x, C_k^m)}{\sum_{l=1}^{K_m} d(x, C_l^m)}$$

根据前面的讨论，分母一定是正数，且距离函数 $x \mapsto d(x, C_k^m)$ 连续，因此 $\lambda_k^m(x)$ 也连续。定义 $f^m : X \to X$ 为

$$f^m(x) = \sum_{k=1}^{K_m} \lambda_k^m(x) y_k^m$$

注意到 $\sum_{k=1}^{K_m} \lambda_k^m(x) = 1$ 对每个 $x \in X$ 都成立，故 $f^m(x)$ 是点集 $(y_k^m)_{k=1}^{K_m}$ 的凸组合，又因为 X 是凸集，故 $f^m(x)$ 的值域在 X 内。

Kakutani 不动点定理

第二步：运用布劳威尔不动点定理

对每个 $m \in \mathbb{N}$，f^m 都是连续的，因为它是有限个连续函数的和，根据布劳威尔不动点定理，f^m 至少有一个不动点 $x^{*.m} \in X$ 满足 $f^m(x^{*.m}) = x^{*.m}$。因为不动点序列 $(x^{*.m})_{m\in\mathbb{N}}$ 包含在紧集 X 中，故存在一个收敛子列 $(x^{*.m_l})_{l\in\mathbb{N}}$，收敛到一个点 $x^* \in X$。

第三步：$\boldsymbol{x^*}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的一个不动点

因为 $x^{*.m_l}$ 是 f^{m_l} 的不动点，故

$$x^{*.m_l} = f^{m_l}(x^{*.m_l}) = \sum_{k=1}^{K_{m_l}} \lambda_k^{m_l}(x^{*.m_l}) y_k^{m_l}$$

Kakutani 不动点定理

此时我们需要利用前面的引理。对任意的 $\varepsilon > 0$，取符合引理条件的 $\delta > 0$，令 L 足够大使得对所有的 $l \geqslant L$，

1. $\frac{1}{m_l} < \frac{\delta}{2}$；
2. $d(x^{*.m_l}, x^*) < \frac{\delta}{2}$。

令 $l \geqslant L$，对每个满足 $\lambda_k^{m_l}(x^{*.m_l}) > 0$ 的 k，有 $d\big(x_k^{m_l}, x^{*.m_l}\big) < \frac{1}{m_l} < \frac{\delta}{2}$（回忆 $\lambda_k^m(x)$ 的定义），因此，根据三角不等式，对每个 k 有

$$d\big(x^*, x_k^{m_l}\big) \leqslant d(x^*, x^{*.m_l}) + d\big(x^{*.m_l}, x_k^{m_l}\big) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

根据引理，$y_k^{m_l} \in F\big(x_k^{m_l}\big) \subseteq B(F(x^*), \varepsilon)$ 成立。故对任意的 $k \in [K_m]$，$\lambda_k^{m_l}(x^{*.m_l}) = 0$ 或者 $y_k^{m_l} \in B(F(x^*), \varepsilon)$。故根据上页式，$x^{*.m_l}$ 是凸集 $B(F(x^*), \varepsilon)$ 中元素的凸组合，故 $x^{*.m_l} \in B(F(x^*), \varepsilon)$。因为 ε 是任意的，且 $F(x^*)$ 是闭集，故 $x^* \in F(x^*)$，即 x^* 是 F 的一个不动点。

不动点理论相关的历史

角谷不动点定理在 1941 年由角谷静夫提出，后来也有泛化为无穷维度局部凸拓扑向量空间的推广，称为角谷-格里科斯伯格-樊定理，对应的单值函数定理是吉洪诺夫不动点定理，具体的描述可以参考这个网页。还有一些其它的历史可以参考这个网页。

不动点理论相关的历史

事实上不动点理论是一个曾经非常热门的方向，从布劳威尔不动点定理开始，1922 年，波兰著名数学家 S. Banach 给出了一个既简单又实用的压缩映射原理。此后也有越来越多的不动点定理研究成果涌现，除了这里讨论的角谷不动点定理外，还有例如 1968 年的 Fan-Browder 不动点定理，1972 年的 Himmelberg 不动点定理以及 Tarafdar 在 1987 年和 1992 年分别在拓扑线性空间和 H-空间建立的不动点定理；美国数学家 Michael（1956 年），Deutsch 和 Kenderov（1983 年），应用集值分析中的连续选择原理在拓扑空间建立集值不动点定理和几乎不动点定理；丹麦数学家 Nielsen 研究不动点的个数（Nielsen 数），开创不动点类理论的研究；1990 年以后，关于不动点理论的研究达到一个高潮，在各种映射或空间条件下，讨论不动点，随机不动点，几乎不动点等，每年有上百篇论文发表，新的不动点定理和各种迭代逼近方法不断涌现。

纳什定理的证明

我们将使用角谷不动点定理再次证明纳什定理，这事实上也是纳什本人使用的方法（见 Nash, J. F. (1950) **Equilibrium Points in N-Person Games**）。同样令 $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$。

这一证明非常简单直接，只需要定义 $f_i : \Sigma \to 2^{\Sigma_i}$ 为

$$f_i(\sigma) = \left\{\sigma_i \in \Sigma_i : U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{\sigma_i{}' \in \sigma_i} U_i(\sigma_i{}', \sigma_{-i})\right\}$$

即 $f_i(\sigma)$ 是参与人 i 对 σ_{-i} 的最优反应的集合。定义 $F : \Sigma \to 2^{\Sigma}$ 满足 $F(\sigma) = \times_{i\in N} f_i(\sigma)$。因为每个 $f_i(\sigma)$ 是最优反应集合，根据混合策略的性质显然是闭凸集，故 $F(\sigma)$ 是闭凸集，进一步显然 F 图像为闭集（读者应当自行验证），故符合角谷不动点定理的条件，故存在 $\sigma^* \in F(\sigma^*)$，即 $\forall i \in N$，$\sigma_i^* \in f_i(\sigma^*)$，即 σ_i^* 是 σ_{-i} 的最优反应，故 σ^* 是一个混合策略纳什均衡。

一些评注

因此只需要把集值函数直接定义为最优反应集合即可，那么不动点就是互为最优反应，因此这一证明相比于布劳威尔不动点定理的证明要简单许多，这也体现出角谷不动点定理的强大。

关于角谷静夫，有一个很经典的趣事。在《纳什博弈论论文集》序言部分第七页最下边的注释，序言作者 Ken Binmore 讲了一个小故事，有次角谷静夫做演讲，演讲结束后，角谷静夫问 Kin Binmore 为啥这么多人来听演讲，Ken Binmore 解释说许多经济学家是来看作出如此重要的角谷静夫不动点理论的作者的。角谷静夫却回答说："什么是角谷静夫不动点理论"。

连续策略空间纳什均衡存在性

在前面的讨论中，我们假设策略空间是有限集，但是在价格竞争等问题中，策略空间可能是连续的，因此我们需要考虑连续策略空间上的纳什均衡存在性问题。下面的结论是经典的：

定理

考虑一个策略式博弈 $\Gamma = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$，

1. 若 S_i 是欧氏空间的非空凸紧集，u_i 关于 s 连续，关于 s_i 拟凹，那么 Γ 至少有一个纯策略纳什均衡；
2. 若 S_i 是度量空间的非空紧集，u_i 关于 s 连续，那么 Γ 至少有一个混合策略纳什均衡。

除此之外，后续的数理经济学家也对大量特殊情形下的纳什均衡存在性问题进行了研究，也有文章进一步探究了纳什均衡的唯一性等，读者在将来遇到相关问题时可以寻找此类文献。

CONTENT

目录

Banach 不动点定理

Banach（巴拿赫）不动点定理（也称压缩映射原理）是最经典的不动点定理。为了介绍这一定理，首先需要定义度量空间：

定义

一个**度量空间（metric space）**是一个集合 X 和一个度量（距离函数）$d: X \times X \to \mathbb{R}$，满足对每个 $x, y, z \in X$，有

1. $d(x, y) \geqslant 0$，且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；
2. $d(x, y) = d(y, x)$；
3. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$。

很直观地，度量空间就是一个空间中的点之间有一个距离的概念，这一距离的定义抽象了欧氏空间中的距离概念的四个特性：非负性、同一性、对称性和三角不等式。

完备（complete）度量空间指柯西列收敛的度量空间。

Banach 不动点定理

定义

令 (X,d) 是一个度量空间，$T: X \to X$ 是一个映射。如果存在 $0 < \beta < 1$ 使得对每个 $x, y \in X$，有

$$d(Tx, Ty) \leqslant \beta d(x, y)$$

那么称 T 是一个（以 β 为模的）**压缩映射（contraction mapping）**。

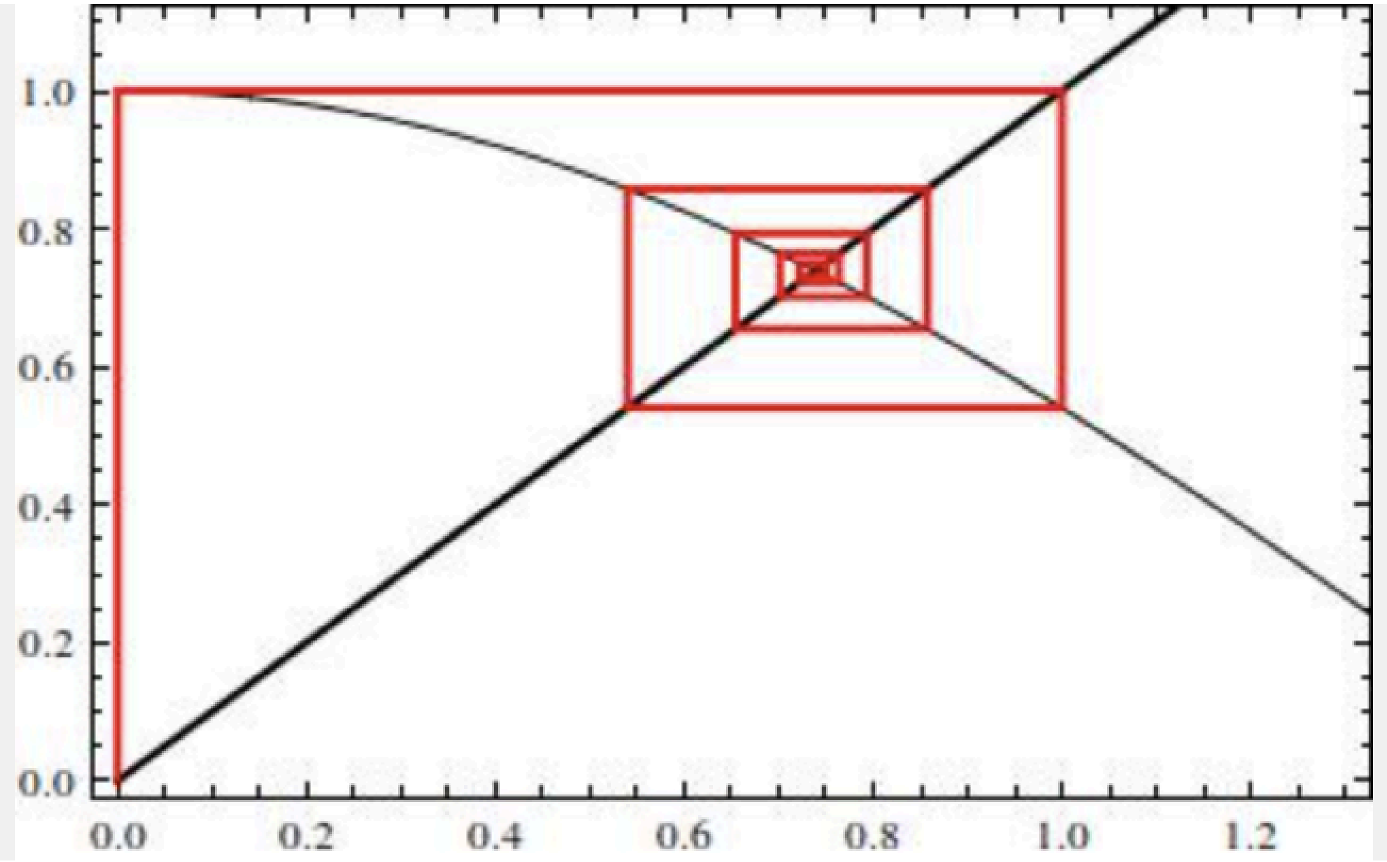
Banach 不动点定理

令 (X,d) 是一个完备的度量空间，$T: X \to X$ 是一个以 β 为模的压缩映射，则

1. T 有且仅有一个不动点 $x^* \in X$，即 $Tx^* = x^*$；
2. 对于任意 $x_0 \in X$，$d(T^n x_0, x^*) \leqslant \beta^n d(x_0, x^*)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立，即 $T^n x_0$ 收敛到 x^*。

Banach 不动点定理

Banach 不动点的直观如下图所示。对于一个压缩映射 T，我们从 x_0 出发，不断迭代 T，得到 $Tx_0, T^2x_0, T^3x_0, \ldots$，这些点会越来越接近不动点 x^*。



Banach 不动点定理

定理的第二部分是显然的：$d(T^n x_0, x^*) = d(T^n x_0, Tx^*) \leqslant \beta^n d(T^{n-1} x_0, x^*)$，然后利用归纳法即可证明。

为了接下来证明方便，记 $T^n x_0 = x_n$。由压缩映射性质，有

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leqslant \beta d(x_n, x_{n-1})$$

使用归纳法可得 $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \beta^n d(x_1, x_0)$。因此对任意的 $m > n$ 有

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \beta^k d(x_1, x_0) = \frac{\beta^n}{1-\beta}(1-\beta^{m-n}) d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 是柯西列，因为 X 是完备的，故存在极限 $x^* \in X$。下面证明 x^* 是 T 的不动点。注意到对任意的 n 和 x_0 都有

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leqslant d(Tx^*, T^n x_0) + d(Tx_0, x^*) \\ &\leqslant \beta d(x^*, T^{n-1} x_0) + d(Tx_0, x^*) \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时上式最后两项都趋近于 0，因此 $d(Tx^*, x^*) = 0$，即 $Tx^* = x^*$。

最后，我们需要证明不动点的唯一性。假设存在另一个不动点 $y^* \in X$，则有

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leqslant \beta d(x^*, y^*)$$

由于 $0 < \beta < 1$，故 $d(x^*, y^*) = 0$，即 $x^* = y^*$。

Tarski 不动点定理

Tarski（塔斯基）不动点定理也是一个常用的不动点定理，为了介绍这一定理，首先需要回顾离散数学中偏序关系与格的概念。

首先回忆集合 X 上的二元关系 $\succeq$ 是满足 $x \succeq y$ 的全体有序对 (x, y) 构成的 $X \times X$ 的一个子集。

定义

偏序关系（partial order）是满足如下性质的二元关系 $\succeq$:

1. 自反性：$x \succeq x$ 对所有 $x \in X$ 成立；
2. 传递性：$x \succeq y$ 且 $y \succeq z$ 蕴含 $x \succeq z$；
3. 反对称性：$x \succeq y$ 且 $y \succeq x$ 蕴含 $x = y$。

如果一个偏序关系还满足完备性（任何两个元素均可比），则称其为一个全序。

Tarski 不动点定理

设 $(X, \succeq)$ 是一个偏序关系，并且 $S \subseteq X$。如果 $\exists \overline{x} \in S$，满足不存在 $x \in S$，使得 $x \succeq \overline{x}$，那么称 $\overline{x}$ 是 S 的一个极大元 **(maximal element)** ，不难理解极大元可能有多个。同理，可以得到极小元 **(minimal element)** 的定义。

一个容易混淆的概念是最大元 **(greatest element)** 和最小元 **(least element)** 。最大元是指 S 的一个元素 $\overline{x}$，使得 $\forall x \in S$，$\overline{x} \succeq x$，最小元类似。根据定义可得最大（小）元必唯一。

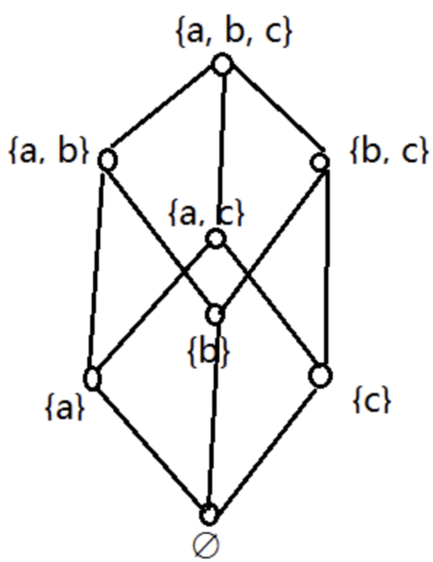
接下来定义集合的上界 **(upper bound)** ，如果存在 $x \in X$，使得任取 $y \in S$，都有 $x \succeq y$，那么称 x 是 S 的一个上界，注意 x 不一定在 S 中 。可能有很多元素都是 S 的上界。同理，可以定义下界 **(lower bound)** 。

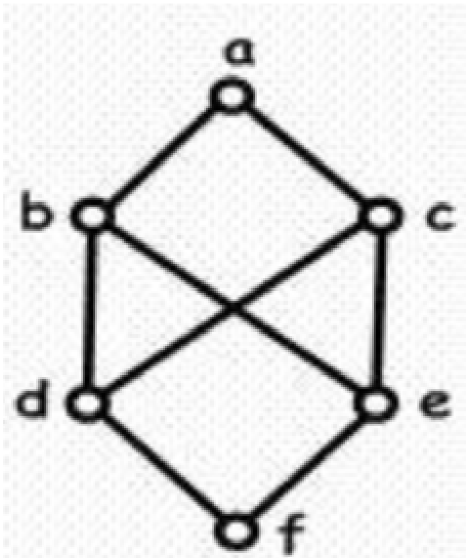
进一步地，定义上确界 **(supremum)** 为 S 的上界的最小元，记作 $\sup S$，下确界 **(infimum)** 类似定义为 S 的下界的最大元，记作 $\inf S$。

定义

对偏序关系 $(X, \succeq)$，如果对任意的 $x, y \in X$，$x \vee_X y = \sup_X\{x, y\}$ 和 $x \wedge_X y = \inf_X\{x, y\}$ 都存在且在 X 中，则称 X 是一个**格（lattice）**。如果对任意的 $S \subset X$，$\sup_X S$ 和 $\inf_X S$ 都存在且在 X 中，那么称 X 是一个**完全格（complete lattice）**。

下图中左侧是一个格，右侧不是格（b, c 没有下确界）。





根据归纳法容易得到，如果格 $(X, \succeq)$ 中的 X 是有限集，那么一定是完全格。无限集的例子可以通过 $((0,1), \succeq)$ 理解，这是一个格但不是完全格，因为 $(0,1)$ 的上下确界不在 $(0,1)$ 中。

为了陈述 Tarski 不动点定理，首先定义如下的概念：

定义

对于两个偏序集 $(X, \succeq_X)$ 和 $(Y, \succeq_Y)$（注意两个序关系不一定一样），函数 $f : X \to Y$ 是**非递减（nondecreasing）的**，如果对任意的 $x, x' \in X$ 使得 $x \succeq_X x'$，有 $f(x) \succeq_Y f(x')$。

显然这一定义与 $\mathbb{R}$ 上的非递减的含义是一致的，只是定义在了一般的偏序集上。

Tarski 不动点定理

接下来可以给出 Tarski 不动点定理：

Tarski 不动点定理

设 $(X, \succeq)$ 是一个完全格，$f: X \to X$ 是一个非递减函数。令 $X^* = \{x \in X : f(x) = x\}$，即 f 的不动点集。那么

1. X^* 非空；
2. $\overline{x}^* = \sup_X\{x : f(x) \succeq x\}$ 和 $\underline{x}^* = \inf_X\{x : x \succeq f(x)\}$ 都在 X^* 中，且对任意的 $x^* \in X^*$，有 $\overline{x}^* \succeq x^* \succeq \underline{x}^*$；
3. $(X^*, \succeq)$ 是一个完全格。

1 和 3 应当是不难理解的，2 的含义是 f 有最大的不动点和最小的不动点，且它们的表达式是可以写出来的。

一个简单的例子，$f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的不动点是 $\{0, 1\}$，但是在非完全格 $(0, 1)$ 上不存在不动点。

下面开始证明 Tarski 不动点定理，首先证明第一条。定义 $X' = \{x \in X : f(x) \succeq x\}$。已知 $(X, \succeq)$ 是完全格，故 $\inf_X X$ 存在，又根据下确界的定义可知 $f(\inf_X X) \succeq \inf_X X$，故 $\inf_X X$ 在 X' 中，故 $X' \neq \emptyset$。

令 $\overline{x}^* = \sup_X X'$，下面证明 $\overline{x}^* = f(\overline{x}^*)$。任取 $x \in X'$，有 $f(x) \succeq x$ 和 $\overline{x}^* \succeq x$，故有 $f(\overline{x}^*) \succeq f(x) \succeq x$，因此 $f(\overline{x}^*) \succeq \overline{x}^*$（上界一定比上确界更大），从而可以进一步得到 $f(f(\overline{x}^*)) \succeq f(\overline{x}^*)$，因此 $f(\overline{x}^*) \in X'$，因此 $\overline{x}^* \succeq f(\overline{x}^*)$（因为 $\overline{x}^*$ 是上确界）。根据反对称性，可得 $\overline{x}^* = f(\overline{x}^*)$，从而第一条得证。

接下来证明第二条。根据不动点定义 $x^* = f(x^*)$ 可知 $x^* \in X'$，因为 $\overline{x}^*$ 是 X' 的上确界，故 $\overline{x}^* \succeq x^*$，同理可得 $x^* \succeq \underline{x}^*$。

最后证明第三条。要证 $(X^*, \succeq)$ 是一个完全格，只需证任意 X^* 的子集的上确界和下确界均存在且在 X^* 中。

Tarski 不动点定理

任取 $S \subseteq X^*$，令 $\overline{S} = \sup_X S$。再令 $Z = \left\{x \in X : x \succeq \overline{S}\right\}$，则只需证 Z 的不动点子集 $Z^* = \{z \in Z : z = f(z)\}$ 有下确界（读者需可以自行验证）。

任取 $T \subseteq Z$，由于 X 是完全格，故 T 的上/下确界至少在 X 中。根据 Z 的定义显然 $\sup_Z T = \sup_Z X$。考虑下确界，任取 $y \in T$，可知 $y \succeq \overline{S}$，故 $\overline{S}$ 是 T 的一个下界，故 $\inf_X T \succeq \overline{S}$，因此 $\inf_Z T = \inf_Z X$，故 Z 是一个完全格。

任取 $z \in Z$，都有 $z \succeq \overline{S} \succeq x$，$\forall x \in S$，因此 $f(z) \succeq f(x) = x$，$\forall x \in S$，即 $f(z)$ 是 S 的一个上界，因此 $f(z) \succeq \overline{S}$，故 $f(z) \in Z$，因此 f 限制在 Z 上的值域为 Z。

令 $f|_Z : Z \to Z$ 是 f 在 Z 上的限制，满足 $\forall z \in Z$，$f|_Z(z) = f(z)$，故非递减。根据 1 可知Z^* 非空；根据 2 可知存在 $\underline{z}^*, \overline{z}^*$ 使得 $\forall z \in Z^*$，都有 $\overline{z}^* \succeq z^* \succeq \underline{z}^*$，故 $\underline{z}^*$ 是 Z^* 的下确界，因此 $\underline{z}^* = \sup_{X^*} S$。类似可得 $\inf_{X^*} S \in X^*$，故 X^* 是一个完全格。