ZJU 2024–2025 学年春夏学期
计算经济学讨论班

Lec 4: 不完全信息静态博弈

吴一航 yhwu_is@zju.edu.cn

浙江大学计算机科学与技术学院

CONTENT

目录

行业博弈的例子

现实中的博弈不一定是完全信息的，例如德州扑克游戏中我们不知道对手的手牌，厂商竞争互相之间的实力也并非完全已知，因此需要引入**不完全信息博弈（game with incomplete information）**来描述这些场景。

考虑一个包括两个企业的行业博弈。假定这个行业有一个在位者（参与人 1）和一个潜在的进入者（参与人 2）。参与人 1 决定是否建立一个新工厂，同时参与人 2 决定是否进入该行业。假定参与人 2 不知道参与人 1 建厂的成本是 3 还是 0，但参与人 1 自己知道。

行业博弈的例子

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

- 参与人 1 有占优策略：成本低，建厂；成本高，不建厂；
- 如果参与人 2 已知参与人 1 的类型，决策显然：当且仅当参与人 1 成本高不建厂时，参与人 2 进入才是有利可图的；
- 然而参与人 1 的类型信息未知，且目前的博弈框架无法描述这种参与人有多种可能类型的情况。

不完全信息博弈的定义

因此我们需要将原先的博弈定义扩展到可以描述不完全信息博弈的形式：

- 自然地，首先可以引入一个参数，用以描述参与人的**类型（type）**，在不同的类型下，参与人在进行着不同的博弈，这些博弈称为**状态博弈（state games）**；
- 其次，在不完全信息博弈中，尽管参与人只知道自己的类型，不知道其他人的确切类型，但我们都假定每个参与人对的所有参与人的类型具有先验分布，并且先验分布是是共同知识；
  - 这一点或许需要一些解释，读者可以想象扑克牌游戏的场景，在发牌之前各个参与人之间的确对其他人的牌的分布会有一个大致的估计，这一估计就是先验分布，并且这一分布与其他参与人认为的先验分布是基本一致的，例如大家都会认为一个人同时拥有四张相同数字的牌的概率是不大的。

不完全信息博弈的定义

引入状态博弈和共同先验知识的不完全信息博弈模型被称为**海萨尼模型（Harsanyi model）**，下面给出具体的定义：

定义

不完全信息海萨尼博弈是有序四元组 $\left(N, (T_i)_{i\in N}, p, S\right)$：

- N 是参与人的有限集合；
- T_i 是参与人 i 类型的有限集合，类型向量集合表示为 $T = \times_{i\in N} T_i$；
- $p \in \Delta(T)$ 是类型向量集合上的先验分布（是共同知识），对每个参与人 $i \in N$ 和每个类型 $t_i \in T_i$，$p(t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p(t_i, t_{-i}) > 0$；
- S 是状态博弈集合。

状态博弈实际上就是参与人之间进行的博弈，按参与人是否已知自己的类型分为两种（区分的用处之后会看到）：

不完全信息博弈的定义

1. 当参与人不知道自己的类型时，每个状态博弈 $s \in S$ 是向量 $s = \left(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$：
   - 其中 A_i 是参与人 i 的非空行动集合，由参与人所有类型下的行动组成；
   - $u_i : T \times (\times_{i \in N} A_i) \to \mathbb{R}$ 是参与人 i 的效用函数，与所有人的类型都有关；
2. 当参与人知道自己的类型后，假设所有参与人的类型组成的类型向量为 $t = (t_1, \ldots, t_n)$，则状态博弈 s 转为 $s_t = \left(N, (A_i(t_i))_{i \in N}, (u_i(t_i))_{i \in N}\right)$：
   - 其中 $A_i(t_i)$ 是参与人 i 在类型为 t_i 下的行动集合，与其它参与人的类型无关；
   - $u_i(t_i)$ 是参与人 i 在类型 t_i 下的效用函数，但仍然与其它参与人的类型有关。

不完全信息博弈的定义

上面的定义看似有些难以理解，但事实上**只是在普通的完全信息博弈上增加了参与人的类型以及类型的先验分布，并且参与人的行动和效用函数与参与人类型相关**。在给出定义后，我们可以完整地叙述一个不完全信息博弈的进行顺序：

1. 自然根据概率分布 p 抽取类型向量 $t = (t_1, ..., t_n)$ 赋予每个参与人，从而每个参与人 i 知道自己的类型 t_i，但不知道其他参与人的具体类型 t_{-i}；
2. 参与人 i 知道自己的类型后更新信息：对其他人类型的分布利用贝叶斯公式更新为 $p(t_{-i} \mid t_i)$，并且因为可能在不同类型下的行动集合不同，确定类型 t_i 后行动集合确定为 $A(t_i)$，且收益函数确定为 $u_i(t_i)$，故状态博弈 s 转为 s_t；然后所有参与人同时选择自己的行动：每个参与人 i 知道自己的类型 t_i，选择行动 $a_i \in A_i(t_i)$；
3. 每个参与人 i 得到收益 $u_i(t; a)$，其中 $a = (a_1, ..., a_n)$ 是所有参与人的行动向量。

代入前面的例子，其中参与人有两个，即参与人 1 和参与人 2:

- 参与人 1 的类型可以是高成本或者低成本，参与人 2 的类型只有一种（因此是共同知识）;
  - 自然首先根据先验分布随机选择参与人 1 的成本类型，参与人 1 得知自己的类型;
  - 参与人 2 只知道自己的类型，不知道参与人 1 的类型，但知道参与人 1 类型的分布;
  - 然后两个参与人选择自己的类型下可以选择的行动（(不）建厂/（不）进入)，最后根据选择的行动和真实的强弱类型得到收益。

需要注意的是，尽管在知道自己的类型 t_i 后行动集合确定的，收益函数仍然是未知的，因为收益函数还与其他人的类型有关，例如前面的例子中在对手不同的的强弱类型下，你的收益函数是不同的。

不完全信息博弈的三个阶段

当然读者可能心里会有一个疑惑：这里讨论的是静态博弈，但前面的行动顺序看起来像是动态博弈。

- 仔细观察便会发现，自然的行动并非策略性的，与参与人之间没有交互，最后一步的结果在第二步选择行动后就确定了；
- 尽管这并非真的动态博弈，但上述三个步骤划分了经济学文献中常见的不完全信息博弈的三个阶段：
  - 每个人类型被指派之前的阶段被称为**事前阶段（ex ante）**；
  - 每个人类型被指派之后的阶段被称为**事中阶段（interim）**；
    - 事前和事中阶段也就对应于状态博弈的两个类型；
  - 收益确定之后的阶段被称为**事后阶段（ex post）**。

最后值得一提的是，提出这一不完全信息博弈框架的约翰·海萨尼（John C.Harsanyi）与纳什同在 1994 年获得诺贝尔经济学奖。当年获得诺贝尔经济学奖的还有莱茵哈德·泽尔腾（Reinhard Selten），其最著名的贡献是提出了子博弈完美纳什均衡的概念。

海萨尼转换

上述语言描述可以有更直观的表达。考虑下图的不完全信息博弈，事实上就是将低成本参与人 1 的进入成本调整为 1.5:

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

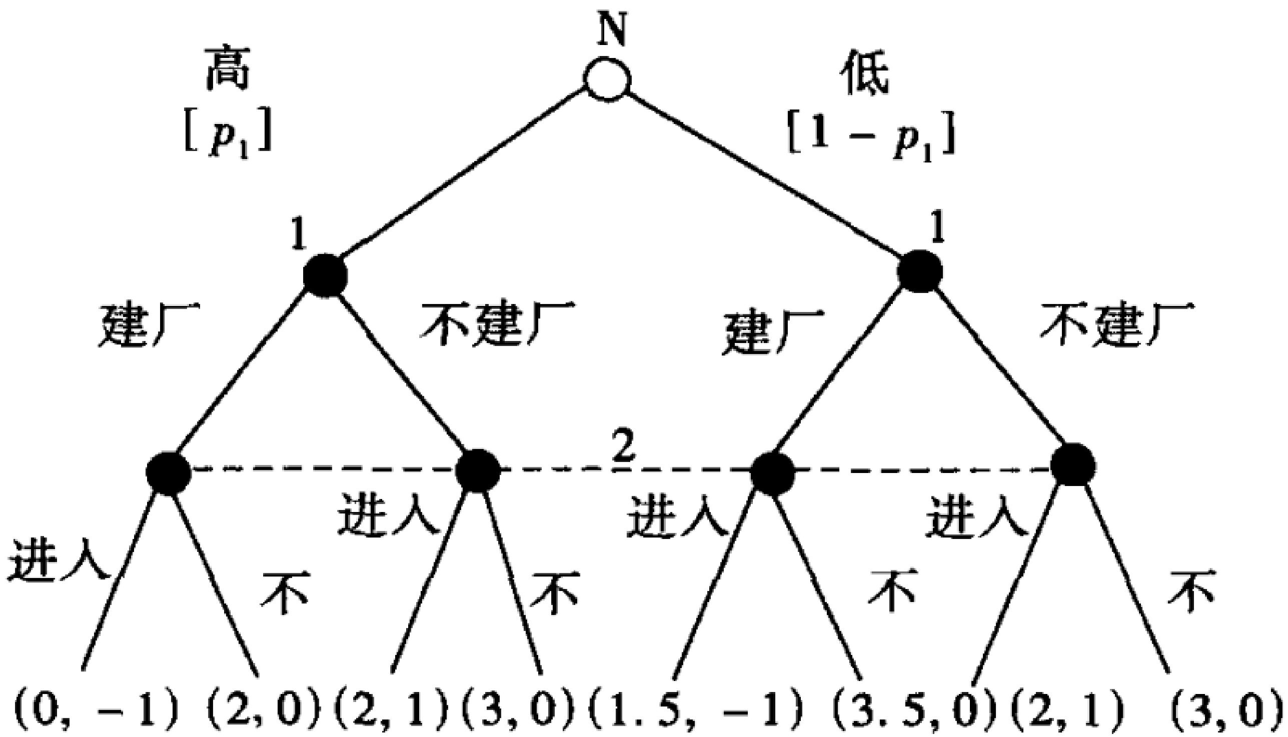
参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	1.5，−1	3.5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

海萨尼转换（the Harsanyi transformation）通过将不同参与人的类型确定过程描述为自然（参与人 N）的随机选择，将不完全信息博弈转化为完全信息不完美信息博弈。

海萨尼转换



上图就隐含了所有参与人对自然行动概率分布有一致判断的标准假设。此外，基于海萨尼转换，我们可以直接将完全信息不完美信息博弈的策略与均衡的概念应用到不完全信息博弈中。

不完全信息博弈的策略

基于海萨尼转换，可以定义如下不完全信息博弈中的策略：

定义

在不完全信息博弈海萨尼模型中，参与人 i 的纯策略是函数

$$s_i : T_i \to \bigcup_{t_i \in T_i} A_i(t_i),$$

满足 $s_i(t_i) \in A_i(t_i)$，即 $s_i(t_i)$ 是策略 s_i 为类型 t_i 的参与人 i 指定的行动；混合策略是纯策略上的概率分布，即

$$\sigma_i : T_i \to \bigcup_{t_i \in T_i} \Delta(A_i(t_i)),$$

满足 $\sigma_i(t_i) = (\sigma_i(t_i; a_i))_{a_i \in A_i(t_i)} \in \Delta(A_i(t_i))$，也就是说 $\sigma_i(t_i; a_i)$ 是类型 t_i 的参与人 i 选择行动 a_i 的概率。

不完全信息博弈的策略

需要注意的是，尽管自然会为每个参与人指定一个类型，但参与人还是要为每个类型都定义一个策略的：

- 事前阶段参与人不知道自己的类型；
- 事中阶段参与人仍然不知道其它参与人的类型，但在分析其它参与人的行为时会考虑他们的所有可能类型；
- 参考海萨尼转换，不完美信息博弈的策略需要在所有信息集上定义策略。

效用计算

纳什均衡的定义需要涉及收益的比较，故此处简单展开计算。根据定义，当参与人的策略向量为 $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ 时，如果随机行动选择的类型向量是 $t = (t_1, ..., t_n)$，那么每个行动向量 $(a_1, ..., a_n)$ 被选择的概率是 $\prod_{i \in N} \sigma_i(t_i; a_i)$，因此参与人 i 的期望收益是

$$U_i(t; \sigma) = \sum_{a \in \times_{i \in N} A_i} \prod_{i \in N} \sigma_i(t_i; a_i) u_i(t; a),$$

这一表达式中在事前和事中阶段仍然存在不确定性：在事前阶段，参与人不知道自己和其它参与人的类型，在事中阶段，参与人不知道其它参与人的类型，因此事前和事中的收益函数需要进一步求取期望。

效用计算

根据先验分布和贝叶斯更新后的分布，不难得到参与人 i 的事前阶段收益为

$$U_i(\sigma) = \sum_{t \in T} p(t) U_i(t; \sigma),$$

参与人 i 的事中阶段收益为

$$U_i(\sigma \mid t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i} \mid t_i) U_i(t; \sigma),$$

不难看出事前阶段期望收益与事中阶段期望收益的关系为

$$U_i(\sigma) = \sum_{t_i \in T_i} p(t_i) U_i(\sigma \mid t_i).$$

不完全信息博弈均衡的定义

基于上述讨论可以定义两类纳什均衡：第一类是事前均衡，没有人在知道自己类型之前愿意偏离自己的策略，第二类是事中均衡，没有人在自己的类型确定之后愿意偏离自己的策略：

定义

不完全信息博弈的策略向量 $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ 是不完全信息博弈的

- **纳什均衡（Nash equilibrium）**，如果对每个参与人 i 和每个策略 $a_i \in A_i$，有 $U_i(\sigma^*) \geqslant U_i(a_i, \sigma_{-i}^*)$；
- **贝叶斯均衡（Bayesian equilibrium）**，如果对每个参与人 i，每个类型 t_i 以及每个可能行动 $a_i \in A_i(t_i)$，有 $U_i(\sigma^* \mid t_i) \geqslant U_i((a_i, \sigma_{-i}^*) \mid t_i)$。

上述定义合理性可以回忆混合策略纳什均衡的等价条件。不难看出纳什均衡就是海萨尼转换后博弈的均衡，因此不完全信息博弈的纳什均衡一定存在。

不完全信息博弈均衡的定义

有的读者可能会思考事后均衡的概念，但仔细一想便会发现这不合理：事后是已经做决策之后的阶段，在做决策后重新做决策不属于我们的讨论范围。

两个均衡的概念或许看起来不够美好：信息的更新使得博弈结果发生很大变化，看起来这样的博弈是不够稳定的，但下面这一定理统一了不完全信息博弈的均衡概念，消除了这一顾虑：

不完全信息博弈的均衡等价性

有限不完全信息博弈中，每个贝叶斯均衡都是一个纳什均衡，每个纳什均衡都是一个贝叶斯均衡。

根据事前和事中收益关系直接可以证明。根据这一定理，此后有限不完全信息静态博弈的求解站在事前或事中角度都是可以的，并且表明不完全信息博弈一定存在贝叶斯均衡。

CONTENT

目录

行业博弈均衡计算

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	3，−1	5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

- 在使用最优反应之前，可以首先检查是否存在劣策略：参与人 1 有占优策略：成本低，建厂；成本高，不建厂；
- 假设参与人 1 成本高的先验概率为 p，由于参与人 2 只有一种类型，因此没有信息更新，纳什均衡和贝叶斯均衡重合；
- 直接计算参与人 2 进入的期望效用为 $p - (1-p) = 2p - 1$，不进入的期望效用为 0；
- 因此当 $p > 1/2$ 时，对于参与人 2，进入是占优策略（此处的占优带有概率，与囚徒困境不同，但也能用于剔除劣策略），故选择进入，$p < 1/2$ 则选择不进入，$p = 1/2$ 二者无差异。

行业博弈均衡计算

上一页的例子因为参与人 1 在两种情况下均存在占优策略而十分容易求解。如果将低成本时的建厂成本设定为 1.5，如下表，则参与人 1 只在高成本时有占优策略（不建厂）。

	进入	不进入
建厂	0，−1	2，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本高时的收益

	进入	不进入
建厂	1.5，−1	3.5，0
不建厂	2，1	3，0

参与人 1 的建厂成本低时的收益

于是只能回到最优反应的定义求解。设参与人 1 低成本时建厂概率为 x，参与人 2 进入概率为 y。

行业博弈均衡计算

首先考虑是否存在纯策略均衡：例如 $x = 1, y = 0$，对低成本的参与人 1 而言，$x = 1$ 是 $y = 0$ 的最优反应；对参与人 2，$x = 1$ 时，$y = 0$ 的效用为 0，$y = 1$ 的效用为 $p - (1 - p) = 2p - 1$，故 $y = 0$ 是 $x = 1$ 的最优反应当且仅当 $p \leqslant 1/2$。

同理可以验证 $x = 0, y = 1$ 在任意的 p 下都是均衡。接下来考虑混合策略均衡，根据无差异条件：

- 低成本参与人 1 是否建厂无差异：$1.5y + 3.5(1 - y) = 2y + 3(1 - y)$，解得 $y = 1/2$;
- 参与人 2 是否进入无差异：$p + (1 - p)(-x + (1 - x)) = 0$，解得 $x = 1/(2(1 - p))$。

总而言之，这一博弈存在两个纯策略均衡（其中一个有条件）和一个混合策略纳什均衡。

行业博弈中参与人的类型和行动空间都是离散的，下面的例子将类型空间推广到连续的情况。

公共产品的供给会引起通常所说的搭便车问题。每一个人都能从公共产品的供给中得到好处，但每一个人都希望别人承担公共产品的供给成本。有很多分析公共产品供给问题的方法，我们在这里只讨论帕尔弗里和罗森塔尔（Palfrey and Rosenthal，1989）的研究。

假定有两个参与人，$i = 1, 2$。参与人同时决定是否提供公共产品，而且供给必须是 $0 - 1$ 决策（即要么提供，要么不提供）。如果至少有一个人提供，每一个参与人的效用是 1，否则为 0；参与人 i 的供给成本是 c_i。参与人的收益如下表所示。

参与人 2

参与人 1		提供	不提供
	提供	$1-c_1, 1-c_2$	$1-c_1, 1$
	不提供	$1, 1-c_2$	$0, 0$

假定公共产品带来的效用（双方各为 1）是共同知识，但每一个参与人的供给成本是私人知识。参与人双方都知道 c_i 服从区间 $[\underline{c}, \overline{c}]$ 上的连续、严格递增的独立同分布 $P(\cdot)$，其中 $\underline{c} < 1 < \overline{c}$（故 $P(\underline{c}) = 0, P(\overline{c}) = 1$）。参与人 i 的类型是他的成本 c_i。

在这个博弈中，参与人的一个纯策略是从区间 $[\underline{c}, \overline{c}]$ 到集合 $\{0, 1\}$ 的一个函数 $s_i(c)$，其中 1 代表“提供”，0 代表“不提供”。参与人 i 的收益是 $u_i(s_i, s_j, c) = \max(s_1, s_2) - c_i s_i$（注意，这里参与人 i 的收益并不取决于 $c_j, j \neq i$）。

确定策略和效用后可以开始求解均衡。令 $z_j = \mathbb{P}(s_j^*(c_j) = 1)$ 代表均衡时参与人 j 在均衡策略 s_j^* 下提供公共产品的概率。

- 则参与人 i 提供时的期望收益为 $1 - c_i$，不提供时的期望收益为 z_j，故仅当参与人 i 提供成本 $c_i < 1 - z_j$ 时选择提供;
- 因此，如果 $c_i < 1 - z_j$，则 $s_i^*(c_i) = 1$；反之，如果 $c_i > 1 - z_j$，则 $s_i^*(c_i) = 0$;
  - 这表明供给公共产品的参与人的类型属于区间 $[\underline{c}, c_i^*]$：仅当他的成本充分低时参与人 i 才会提供公共产品;
  - 类似地，当且仅当对于某些 c_j^* 存在 $c_j \in [\underline{c}, c_j^*]$ 时，参与人 j 才会提供公共产品;
  - 这种“单调性”特性在经济分析中经常用到。

因为 $z_j = \mathbb{P}(\underline{c} \leqslant c_j \leqslant c_j^*) = P(c_j^*)$，故均衡的临界值 c_i^* 必须满足 $c_i^* = 1 - P(c_j^*)$。因此 c_1^* 和 c_2^* 必须同时满足方程 $c^* = 1 - P(1 - P(c^*))$。如果方程存在唯一解，则必有 $c_i^* = c^* = 1 - P(c^*)$。例如 P 是 $[0, 2]$ 上的均匀分布，则 c^* 唯一且等于 $2/3$。

若 $\underline{c} \neq 0$，假定 $\underline{c} \geqslant 1 - P(1)$，则博弈有如下非对称纳什均衡：

- 在均衡的情况下，一个参与人从不提供公共产品，另一个参与人对所有的 $c \leqslant 1$ 都提供公共产品；
- 例如考虑这样一个均衡：参与人 1 从不提供公共产品，$c_1^* = 1 - P(1) < c$，$c_2^* = 1$。参与人选择不提供是因为他的最小成本 $\underline{c}$ 超出他从增加供给中得到的收益 $1 \cdot (1 - P(1))$；对于所有的 $c \leqslant 1$，参与人都选择提供公共产品，因为如果他不提供，则肯定不会有公共产品供给。

公共产品供给博弈

事实上公共产品供给博弈可以通过重复剔除严格劣策略的方式求解均衡。考虑 $\underline{c} < 1 - P(1)$ 且存在唯一的 c^* 使得 $c^* = 1 - P(1 - P(c^*))$ 时的公共产品供给博弈（其中每一轮的严格劣策略读者可以自行验证）:

- 第一轮剔除，任何成本超过 1 的参与人都不会提供公共产品（即对所有的 $c_i \in (c^1, \overline{c}]$，其中 $c^1 = 1$，提供是参与人 i 的严格劣策略）;
- 第二轮剔除，对所有的 $c_i \in [\underline{c}, c^2)$，不提供是参与人 i 的严格劣策略，其中 $c^2 = 1 - P(1) = 1 - P(c^1)$;
- 第三轮剔除，对所有的 $c_i \in (c^3, c^1]$，提供是参与人 i 的严格劣策略，其中 $c^3 = 1 - P(c^2)$。

如此往复，在阶段 $2k+1(k=0,1,2,...)$，提供是成本高于 $c^{2k+1}=1-P\left(c^{2k}\right)$ 的参与人的严格劣策略；在阶段 $2k(k=1,2,...)$，不提供是成本低于 $c^{2k}=1-P\left(c^{2k-1}\right)$ 的参与人的严格劣策略。

序列 c^{2k+1} 和 c^{2k} 分别是严格递减和严格递增的，又都是有界的，从而分别收敛于 c^{+} 和 c^{-}。因为 P 是连续的，$c^{+}=1-P(c^{-})$ 且 $c^{-}=1-P(c^{+})$。如果存在唯一的 c^{*} 满足 $c^{*}=1-P(1-P(c^{*}))$（纳什均衡的唯一性条件），则 $c^{+}=c^{-}=c^{*}$，从而该博弈是（事中）重复剔除严格劣策略可解的。

需要注意的是，和均衡概念一致，严格劣策略的定义也分为事前和事中两个阶段。不难发现，在公共产品供给博弈中剔除的是事中劣策略，因为每一步都建立在已知自己的类型的基础上。

下面将介绍不完全信息静态博弈的更多（技术性的例子）。主要参考弗登伯格和梯若尔的《博弈论》6.5 节，还有一些例子时间关系不在课上讲授，感兴趣的读者可以自行阅读教材。

下面的例子对应类型空间离散，但行动空间连续的情况。古诺竞争是两个寡头同时决定产量的博弈。假定企业的利润为 $u_i = q_i(\theta_i - q_i - q_j)$，其中 θ_i 是线性需求函数的截距与企业 i 的不变单位成本之差，q_i 是企业 i 选择的产量（$s_i = q_i$）。

企业 1 的类型 $\theta_1 = 1$ 是共同知识，但企业 2 拥有关于其单位成本的私人信息。企业 1 认为 $\theta_2 = 3/4$（高成本）和 $5/4$（低成本）的概率均为 $1/2$，且企业 1 的判断是共同知识。

我们来看这个博弈的纯策略均衡。记企业 1 的产量为 q_1，企业 2 在 $\theta_2 = 5/4$ 时的产量为 q_2^L，在 $\theta_2 = 3/4$ 时的产量为 q_2^H。企业 2 的均衡产量必须满足

$$q_2(\theta_2) \in \arg\max_{q_2} q_2(\theta_2 - q_1 - q_2) \Rightarrow q_2(\theta_2) = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$$

企业 1 不知道企业 2 属于哪种类型，因此他的收益只能是对企业 2 的类型取期望：

$$q_1(\theta_2) \in \arg\max_{q_1} \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^L) + \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^H)$$
$$\Rightarrow q_1 = \frac{2 - q_2^H - q_2^L}{4}$$

将 θ_2 的两个取值代入 $q_2(\theta_2)$，不难解得 $q_1 = 1/3, q_2^L = 11/24, q_2^H = 5/24$。事实上这也是唯一的均衡。

消耗战

消耗战是一类类型和行动空间都连续的博弈。假定有两个参与人，$i=1,2$。每个参与人 i 同时选择一个数 $s_i \in [0,+\infty)$，收益函数为

$$u_i(s_i,s_j)=\begin{cases}-s_i & s_j \geqslant s_i \\ \theta_i - s_j & s_j < s_i\end{cases}$$

参与人 i 的类型 θ_i 是私人信息，且其取值在区间 $[0,+\infty)$ 上，累积分布为 P，密度函数为 p。参与人的类型之间是相互独立的。θ_i 是赢家的奖金（即 s_i 最高的参与人）。这个博弈有点类似于二级竞价拍卖，不同的是输家同样要支付其竞价。

事实上，这一博弈被称为消耗战是非常形象的：两个参与人为了争夺一个资源，投入时间，先撑不下去的人输掉了资源，但双方都要付出时间的成本（例如寡头竞争等）。

我们来看这个博弈的（纯策略）贝叶斯均衡 $(s_1(\theta_1), s_2(\theta_2))$。对于每一个 θ_i，$s_i(\theta_i)$ 必须满足

$$s_i(\theta_i) \in \arg\max_{s_i} -s_i \mathbb{P}\big(s_j(\theta_j) \geqslant s_i\big) + \int_{\theta_j : s_j(\theta_j) < s_i} (\theta_i - s_j) p(\theta_j) \mathrm{d}\theta_j$$

我们在这里将发现，在均衡策略组合中，每一个参与人的策略都是其类型的严格递增连续函数。事实上，可以证明，每一个均衡策略组合都有这个特点。为了说明均衡策略是非减的，注意到在均衡时，类型为 $\theta_i{}'$ 的参与人将选择 $s_i{}' = s_i(\theta_i{}')$ 而非 $s_i{}'' = s_i(\theta_i{}'')$；类型为 $\theta_i{}''$ 的参与人将选择 $s_i{}''$ 而非 $s_i{}'$。因此有

$$\theta_i{}'\mathbb{P}(s_j(\theta_j) < s_i{}') - s_i{}'\mathbb{P}(s_j(\theta_j) \geqslant s_i{}') - \int_{\theta_j : s_j(\theta_j) < s_i{}'} s_j(\theta_j) p_j(\theta_j) \mathrm{d}\theta_j$$

$$\geqslant \theta_i{}'\mathbb{P}(s_j(\theta_j) < s_i{}'') - s_i{}''\mathbb{P}(s_j(\theta_j) \geqslant s_i{}'') - \int_{\theta_j : s_j(\theta_j) < s_i{}''} s_j(\theta_j) p_j(\theta_j) \mathrm{d}\theta_j$$

以及

$$\theta_i{}''\mathbb{P}(s_j(\theta_j) < s_i{}'') - s_i{}''\mathbb{P}(s_j(\theta_j) \geqslant s_i{}'') - \int_{\theta_j : s_j(\theta_j) < s_i{}''} s_j(\theta_j) p_j(\theta_j) \mathrm{d}\theta_j$$

$$\geqslant \theta_i{}''\mathbb{P}(s_j(\theta_j) < s_i{}') - s_i{}'\mathbb{P}(s_j(\theta_j) \geqslant s_i{}') - \int_{\theta_j : s_j(\theta_j) < s_i{}'} s_j(\theta_j) p_j(\theta_j) \mathrm{d}\theta_j$$

第一个不等式的左边减去第二个不等式的右边，第一个不等式的右边减去第二个不等式 的左边，我们得到

$$(\theta_i'' - \theta_i')\left[\mathbb{P}\left(s_j(\theta_j) \geqslant s_i'\right) - \mathbb{P}\left(s_j(\theta_j) \geqslant s_i''\right)\right] \geqslant 0$$

因此，如果 $\theta_i'' \geqslant \theta_i'$，则 $s_i'' \geqslant s_i'$，单调性得证。

关于策略的严格递增和连续性严格证明比较繁琐，这里只给出直观解释（处理不连续博弈的常用套路）:

- 首先，如果策略不是严格递增的，那么在某些 $s > 0$ 处必然存在一个“原子”，即使得 $\mathbb{P}\left(s_j(\theta_j) = s\right) > 0$;
  - 此时，对任意小的正数 ε，参与人 i 将选择恰当的策略使其属于区间 $[s - \varepsilon, s)$ 的概率为零，这是因为他可以选择恰好超过 s 的策略从而改善自己的处境。
  - 因此，在 s 处这样的“原子”不可能存在，从而策略必然是严格递增的。

- 同理可以说明策略的连续性。如果策略不是连续的，则存在 $s' \geqslant 0$ 和 $s'' > s'$ 使得 $\mathbb{P}(s_j(\theta_j) \in [s', s'']) = 0$ 同时对于某些 $\hat{\theta}_j$ 和任意小的 $\varepsilon \leqslant 0$ 有 $s_j(\hat{\theta}_j) = s'' + \varepsilon$ 成立；
  - 此时对参与人 i，$s_i = s'$ 严格优于任何 $s_i \in (s', s'')$，因为获胜的概率并没有改变，预期成本却降低了。

现在我们来求严格递增、连续的函数 s_i 及其逆函数 Φ_i，这里 $\Phi(s_i)$ 是选择策略 s_i 的参与人的类型。将方程中的积分变量 θ_j 换成 s_j，得到

$$s_i(\theta_i) \in \arg\max_{s_i} \left\{ -s_i\big(1 - P_j(\Phi_j(s_i))\big) \right.$$

$$\left. + \int_0^{s_i} (\theta_i - s_j) p_j(\Phi_j(s_j)) \Phi_j{}'(s_j) \mathrm{d}s_j \right\}$$

得到如下一阶条件：

$$\Phi_i(s_i)p_j\big(\Phi_j(s_i)\big)\Phi_j{}'(s_i) = 1 - P_j\big(\Phi_j(s_i)\big)$$

现在令 $P_1 = P_2 = P$，求解对称均衡。去掉方程的下标，令 $\theta = \Phi(s)$，并注意到 $\Phi' = 1/s'$，我们得到

$$s'(\theta) = \frac{\theta p(\theta)}{1 - P(\theta)}$$

或者

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{xp(x)}{1 - P(x)}\mathrm{d}x$$

这里的积分常数由 $s(0) = 0$ 决定：如果一件物品对某一参与人毫无价值，他就不会去争取。

当然一阶条件只是必要条件，还需验证解出的策略的确是最优的。这里我们通过验证二阶条件来验证解的合理性。令 $U_i(s_i, \theta_i)$ 代表最大化的目标函数。注意到

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial s_i \partial \theta_i} = p_j\big(\Phi_j(s_i)\big)\Phi_j{}'(s_i) > 0$$

假定存在类型 θ_i 和策略 $s_i{}'$ 使得

$$U_i(s_i{}', \theta_i) > U_i(s_i, \theta_i)$$

其中 $s_i = s_i(\theta_i)$，则有

$$\int_{s_i}^{s_i{}'} \frac{\partial U_i(s, \theta_i)}{\partial s} \mathrm{d}s > 0$$

或对所有的 s 应用一阶条件，$\partial U_i(s, \Phi_i(s))/\partial s = 0$

$$\int_{s_i}^{s_i{}'} \left(\frac{\partial U_i(s, \theta_i)}{\partial s} - \frac{\partial U_i(s, \Phi_i(s))}{\partial s} \right) \mathrm{d}s > 0$$

即有

$$\int_{s_i}^{s_i{}'} \int_{\Phi_i(s)}^{\theta_i} \frac{\partial^2 U_i(s, \theta)}{\partial s \partial \theta} \mathrm{d}s > 0$$

如果 $s_i{}' > s_i$，则对所有的 $s \in (s_i, s_i{}']$ 均有 $\Phi_i(s) > \theta_i$（回忆 s_i 是 θ_i 的严格增函数），从而最后一个不等式不成立。类似地，如果 $s_i{}' < s_i$，该不等式同样不成立。因此，s_i 是 θ_i 型参与人的整体最优策略。

有限类型一价拍卖

接下来求解两个参与人的估值服从两点分布 $\left\{\underline{\theta}, \overline{\theta}\right\}\left(\underline{\theta} < \overline{\theta}\right)$ 时一价拍卖的均衡策略，涉及连续策略空间混合策略。假定双方估值独立，令 $\overline{p}$ 和 $\underline{p}$ 分别代表 θ_i 等于 $\overline{\theta}$ 或 $\underline{\theta}$ 的概率（$\overline{p} + \underline{p} = 1$）。

当类型分布函数是离散而非连续时，参与人就可能选择混合策略，此时问题的处理可能要难些。我们来看该博弈的一个均衡：$\underline{\theta}$ 型参与人出价 $\underline{\theta}$，$\overline{\theta}$ 型参与人按照区间 $[\underline{s}, \overline{s}]$ 上的连续分布 $F(s)$ 随机选择 s（可以证明，均衡是唯一的）。

- 很显然，$\underline{s} = \underline{\theta}$。如果 $\underline{s} > \underline{\theta}$，那么 $\overline{\theta}$ 型参与人可以将出价 $\underline{s}$（或接近于 $\underline{s}$）改为略高于 $\underline{\theta}$ 来改善自己的处境，因为这样做并不降低获胜的概率，却减少了获胜时的成本。

要使 $\overline{\theta}$ 型参与人在支撑 $[\underline{s}, \overline{s}]$ 上根据 $F(s)$ 来选择混合策略，根据无差异原则必有期望收益是常数：

$$\forall s \in [\underline{s}, \overline{s}], \left(\overline{\theta} - s\right)\left[\underline{p} + \overline{p}F(s)\right] = C$$

由于 $F(\underline{\theta}) = 0$，代入上页方程得到常数为 $\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\underline{p}$。从而 $F(\cdot)$ 可由下式给出：

$$\left(\overline{\theta} - s\right)\left[\underline{p} + \overline{p}F(s)\right] = \left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\underline{p}$$

令 $G(s) = \underline{p} + \overline{p}F(s)$ 表示报价 $s \geqslant \underline{\theta}$ 的累积分布，则方程可以改写为

$$\left(\overline{\theta} - s\right)G(s) = \left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\underline{p}$$

最后，$F(\overline{s}) = 1$，这意味着：

$$\overline{\theta} - \overline{s} = \left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\underline{p} \quad \text{或} \quad \overline{s} = \overline{p}\overline{\theta} + \underline{p}\underline{\theta}$$

有限类型一价拍卖

由于卖方的保留价低于 $\underline{\theta}$，交易总会发生，且卖方的期望利润等于期望社会福利减去买方的期望收益。

- 期望社会福利等于 $\underline{p}^2\underline{\theta} + \left(1 - \underline{p}^2\right)\overline{\theta}$；
- $\underline{\theta}$ 型买方的净效用为 0；
- $\overline{\theta}$ 型买方的净效用为 $\underline{p}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)$：由于 $\overline{\theta}$ 型买方对 $(\underline{\theta}, s]$ 上的出价是无差别的，他的效用可以这样计算：假定他的出价恰好超过 $\underline{\theta}$，此时他获胜的概率为 $\underline{p}$，从而净效用为 $\underline{p}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)$。

不难发现二价拍卖的情况下，期望社会福利和买方净效用的结果一致，因此卖方的期望利润一致，符合收益等价原理。

CONTENT

目录

动机：混合策略的解释

完全信息静态博弈常常涉及混合策略均衡:

- 但混合策略均衡可能并不是现实生活的一个合理描述，因为在现实中，参与人并不是根据掷硬币的结果选择自己的行动;
- 海萨尼证明，完全信息情况下的混合策略均衡可以解释为不完全信息情况下纯策略均衡的极限:
  - 混合策略纳什均衡的本质特征不在于参与人 j 随机地选择行动，而在于参与人 i 不能确定参与人 j 将选择什么纯策略;
  - 这种不确定性可能来自参与人 i 不知道参与人 j 的类型。

在不完全信息博弈中，因为参与人的策略都与类型相关联，每个参与人在选择自己的行动时面对的似乎是选择混合策略的对手。“自然”是通过选择参与人的类型而不是选择硬币的正面或反面制造了不确定性。

例：抓钱博弈

为了说明这一点，考虑两个具体例子。第一个例子是**抓钱博弈（grab the dollar）**：桌子上放 1 块钱，桌子的两边坐着两个参与人，如果两人同时去抓钱，每人罚款 1 块；如果只有一人去抓，抓的人得到那块钱；如果没有人去抓，谁也得不到什么。因此，每个参与人的策略是决定抓还是不抓。

参与人 2

参与人 1		抓	不抓
	抓	$-1, -1$	$1, 0$
	不抓	$0, 1$	$0, 0$

抓钱博弈描述的是下述现实情况：一个市场上只能有一个企业生存，有两个企业在同时决定是否进入。如果两个企业都选择进入，各亏损 100 万；如果只有一个企业进入，进入者盈利 100 万；如果没有企业进入，每个企业既不亏也不盈。

例：抓钱博弈

不难验证，这一博弈有两个非对称纯策略均衡（一个参与人抓另一个参与人不抓）和一个对称混合策略均衡：每个参与人以 1/2 的概率选择抓（根据无差异原则即可验证）。

现在考虑同样的博弈但具有如下不完全信息：每个参与人有相同的支付结构，但如果他赢了的话，他的利润是 $1+\theta_i$（而不是 1）。这里 θ_i 是参与人的类型，参与人 i 自己知道 θ_i，但另一个参与人不知道。假定 θ_i 在 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 区间上均匀分布。

参与人 2

参与人 1		抓	不抓
	抓	$-1, -1$	$1+\theta_1, 0$
	不抓	$0, 1+\theta_2$	$0, 0$

例：抓钱博弈

考虑单调策略：参与人 1 当 $\theta_1 \geqslant \theta_1^*$ 时选择抓，否则不抓；参与人 2 当 $\theta_2 \geqslant \theta_2^*$ 时选择抓，否则不抓。给定参与人 j 的策略，参与人 i 选择抓的期望效用为

$$\left(1-\frac{\theta_j^*+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)\cdot(-1)+\frac{\theta_j^*+\varepsilon}{2\varepsilon}\cdot(1+\theta_i)$$

显然 $\theta=\theta^*$ 时上式等于 0（抓的效用大于 / 小于 0 的分界线），并且根据博弈的对称性，自然地考虑 $\theta_1^*=\theta_2^*:=\theta^*$ 的情况，有

$$(2+\varepsilon)\theta^*+(\theta^*)^2=0$$

解得 $\theta^*=0$。故只要 $\theta_i \geqslant 0$ 选择抓，否则不抓。因为 $\theta_i \geqslant 0$ 和 $\theta_i<0$ 的概率各为 1/2，每个参与人在选择自己的策略时认为对方抓和不抓的概率均为 1/2，似乎面对的是一个混合策略均衡，但实际上是纯策略均衡。当 $\varepsilon \to 0$ 时，上述贝叶斯纯策略均衡就收敛于完全信息博弈的混合策略均衡。

例：消耗战

作为另一个例子，考虑对称信息消耗战。假定收益函数：

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} -s_i & s_j \geqslant s_i \\ \hat{\theta} - s_j & s_j < s_i \end{cases}$$

是共同知识。该博弈存在一个混合策略对称均衡。每一个参与人根据分布函数 $F(s) = 1 - \exp\left(-s/\hat{\theta}\right)$ 选择自己的策略：

- 此分布的似然率（即如果参与人在 s 之前没有停，他在 s 和 $s + \mathrm{d}s$ 之间停的条件概率）为 $\mathrm{d}s/\hat{\theta}$；
- 上述策略组合构成均衡是因为继续在位 $\mathrm{d}s$ 时间的期望利得（这里是 $\hat{\theta} \cdot \left(\mathrm{d}s/\hat{\theta}\right)$）等于其等待成本 $\mathrm{d}s$；
- 在每一个瞬间时刻，如果双方继续争夺，则每一个人从该时刻起的收益为 0（不包括此前争夺的沉没成本），因此参与人在争夺和放弃之间是无差异的。

例：消耗战

我们要问：该混合策略均衡是否收敛于某一纯策略均衡？也就是说，是否存在弱收敛于 $\hat{\theta}$ 的连续类型分布序列，使得每一类型的参与人都选择一个纯策略，同时均衡行动的分布收敛于对应的完全信息博弈的均衡混合策略分布？

考虑 $[0,+\infty)$ 上的对称分布序列 $p^n(\cdot)$，其分布函数为 $P^n(\cdot)$，$P^n(0)=0$，且对所有的 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to+\infty}\left[P^n\left(\hat{\theta}+\varepsilon\right)-P^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)\right]=1$$

即连续分布序列 P^n 收敛于集中在 $\hat{\theta}$ 的单点分布。令 $s^n(\cdot)$ 为对应于 p^n 的对称均衡策略，且令 Φ^n 为 s^n 的反函数。对消耗战最大化的一阶条件积分得：

$$P^n(\Phi^n(s))=1-\exp\left(-\int_0^s \mathrm{d}b/\Phi^n(b)\right)$$

例：消耗战

因为 $P^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)$ 收敛于 0，且 $P^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)=P^n\left(\Phi^n\left(s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)\right)\right)$。将 $s=s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)$ 代入上页式，可知对所有的 $\varepsilon>0$，$s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)$ 收敛于 0。类似地，可以证明 $s^n\left(\hat{\theta}+\varepsilon\right)$ 收敛于无穷。因此对任意 $s>0$ 和 $\varepsilon\in\left(0,\hat{\theta}\right)$，以及充分大的 n 有

$$s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)<s<s^n\left(\hat{\theta}+\varepsilon\right)$$

注意上页式可以进一步改写为

$$\begin{aligned}
P^n(\Phi^n(s)) &= 1-\exp\left(-\int_0^{s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)}\frac{\mathrm{d}b}{\Phi^n(b)}\right)\exp\left(-\int_{s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)}^{s}\frac{\mathrm{d}b}{\Phi^n(b)}\right)\\
&= 1-\left[1-P^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)\right]\exp\left(-\int_{s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)}^{s}\frac{\mathrm{d}b}{\Phi^n(b)}\right)
\end{aligned}$$

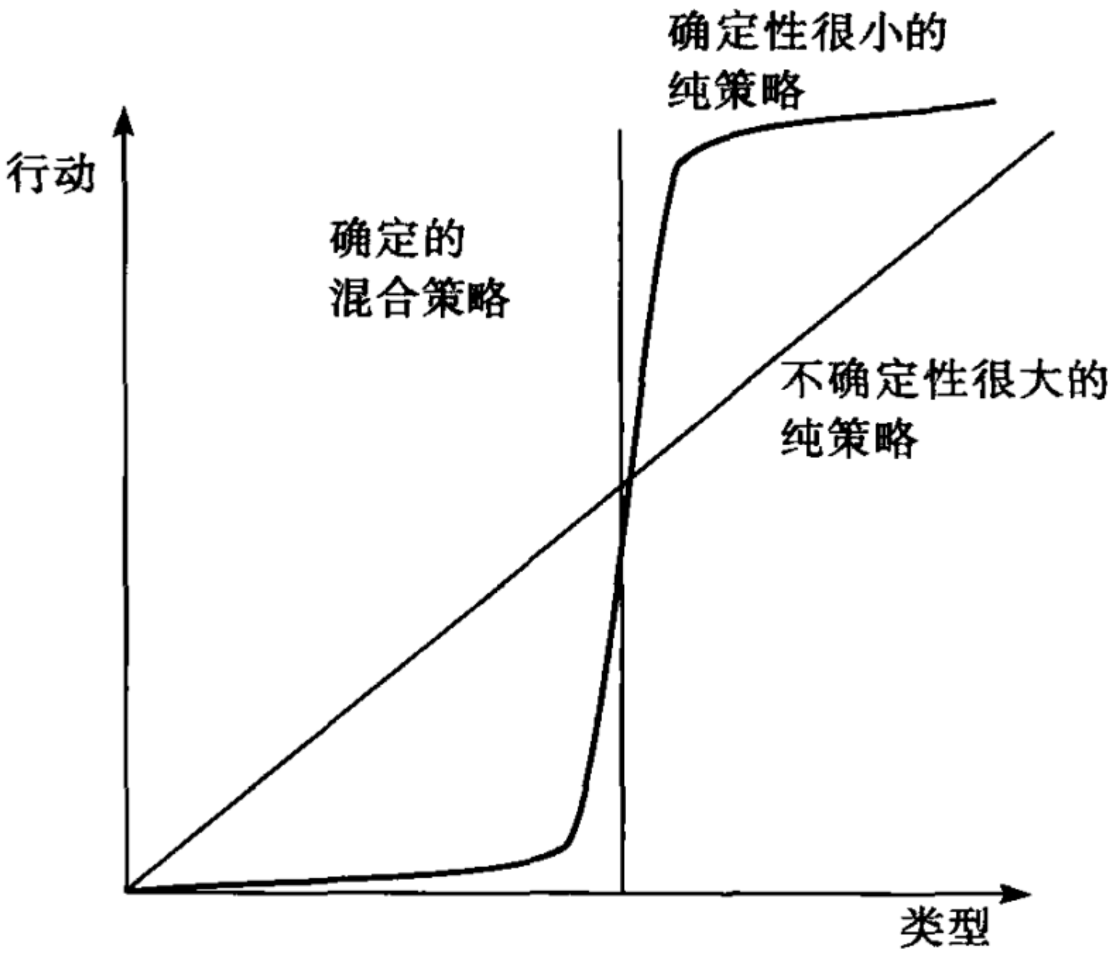
例：消耗战

因为当 n 充分大时，$P^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)$ 和 $s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right)$ 收敛于 0，且对所有的 $b \in \left[s^n\left(\hat{\theta}-\varepsilon\right), s\right]$ 有 $\Phi^n(b) \in \left[\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon\right]$，又因为上述结论对所有的 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们得到

$$P^n(\Phi^n(s)) \to P(\Phi(s)) = 1 - \exp\left(-s/\hat{\theta}\right)$$

因此，我们又一次看到，不完全信息博弈的均衡纯策略序列收敛于相应的完全信息博弈的混合均衡策略。

例：消耗战



纯化定理

海萨尼证明了任何混合策略均衡“几乎总是”可以通过对给定的“微扰”博弈序列的纯策略均衡序列求极限得到。考虑有限策略集为 S_i，收益函数为 u_i 的策略式博弈。海萨尼用如下方法使收益函数不确定化：令 θ_i^s 代表闭区间 $[-1,1]$ 上的一个随机变量，$\varepsilon > 0$ 代表一个正的常数（后面将令其收敛于 0）。参与人 i 的扰动收益函数 $\tilde{u}_i$ 依赖于其类型 $\theta_i = \{\theta_i^s\}_{s \in S}$ 及“扰动”水平 ε：

$$\tilde{u}_i(s, \theta_i) = u_i(s) + \varepsilon \theta_i^s$$

海萨尼假定参与人的类型是统计独立的。令 P_i 代表 θ_i 的概率分布，并假设 P_i 的密度函数 p_i 对所有的 θ_i 都是连续可微的。海萨尼首先证明了参与人 i 的最优反应是唯一的纯策略。进一步地，最优反应策略必然是纯策略。这一性质的直接结论是，在任何扰动博弈的均衡中，对所有 i 和几乎所有的 $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$，$\sigma_i(\theta_i)$ 是一个纯策略。

纯化定理

海萨尼证明了均衡的存在性及如下定理:

定理

给定参与人集 N 和策略空间 S。对于 Lebesgue 可测的收益函数集 $\{u_i(s)\}_{i\in N, s\in S}$，以及所有定义在空间 $\Theta_i = [-1,1]^{\#S}$ 上的独立二次可微分布 p_i，任何对应于收益函数 u_i 的均衡都是当 $\varepsilon \to 0$ 时对应于扰动博弈收益函数的纯策略均衡的极限。确切地说，扰动博弈的纯策略均衡下的均衡策略的概率分布收敛于稳定博弈均衡策略的概率分布。

因此海萨尼的结论表明，纯策略与混合策略的区别只不过是表面的，并不如人们想象得那么重要。