拍卖理论第一讲

阳先毅

浙江大学计算机科学与技术学院

azusaissoooocute@gmail.com

2025 年 2 月 28 日

目录

目录

什么是拍卖?

在进入拍卖之前，我们得首先思考：“**拍卖**”究竟是什么呢?

定义

以公开竞价的方式，将特定的物品或财产权利转让给最高应价者的买卖方式。

——《中华人民共和国拍卖法》

An auction is usually a process of buying and selling goods or services by offering them up for bids, taking bids, and then selling the item to the highest bidder or buying the item from the lowest bidder.

——维基百科

事实上，拍卖并没有统一的定义，非常多的销售机制都可以归类到拍卖。但是我们可以从类似拍卖的制度中提取出一些共同点。

什么是拍卖？

类似拍卖的机制有以下的共同点：

- 以竞价的方式从潜在的买者那里得到他们愿意支付多少的信息，并且谁赢得拍卖以及支付多少这些结果完全是根据接受到的信息决定的，这就是普遍性。
- 竞拍者的身份在决定谁赢得拍卖品并且谁支付多少方面不起任何作用，这就是匿名性。
- 卖者不能确定竞拍者对售卖品的估价是多少——卖着和买者面临的价值的不确定性是拍卖的固有特征。

拍卖的估价

物品的价值与竞拍者之间有什么关系呢?

- 私有价值：竞拍者在竞拍时知道拍卖品对他自己的价值，与其他人认识无关。
- 相互依赖价值：拍卖时拍卖品的价值对竞拍者是未知的，可能收到其他竞拍者可获得信息的影响。
- 共同价值：价值在拍卖的时候是未知的，但是对于所有竞拍者是相同的。

在第一讲中，我们仅仅讨论价值是**私有价值**的情况。
当然，拍卖理论研究的很多，诸如效率，收入，均衡，拍卖物品数量, 机制设计…… 让我们从最常见的开始。

常见拍卖形式

英式拍卖、荷式拍卖、第一价格密封拍卖、第二价格密封拍卖

英式拍卖（升价拍卖）：

1. 拍卖师报出一个较低价格，然后慢慢提高。
2. 竞拍者认为可以接受时举手，最终只剩一个竞拍者时，该竞拍者获胜，以当前价格买下物品。

荷式拍卖（降价拍卖）：

1. 拍卖师报出一个较高价格，然后慢慢降低。
2. 竞拍者认为可以接受时举手，第一个举手的竞拍者获胜，以当前价格买下物品。

常见拍卖形式

第一价格密封拍卖：

1. 竞拍者以密封形式提交报价。
2. 报价最高的竞拍者获胜，支付他自己的报价。

第二价格密封拍卖（维克里拍卖）：

1. 竞拍者以密封形式提交报价。
2. 竞拍者认为可以接受时举手，支付第二高的价格。

常见拍卖形式的等价

荷式拍卖（降价拍卖）$\Leftrightarrow$ 第一价格密封拍卖

英式拍卖（升价拍卖）$\leftrightarrow$ 第二价格密封拍卖

后者只有在价值是私有价值时等价，为什么?

其他竞标者的放弃会干扰到该竞标者。

目录

模型设置——单物品拍卖

N：竞拍人数量。
1：物品数量。
X_i: 第 i 个人对这个物品愿意支付的价格。
x_i: 随机变量 X_i 的实现值。
$\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}_+$

- 我们假设 $X_1, X_2, X_3 ... X_N$ 在 $[0, \omega]$ 上是独立且相同分布的。分布函数是 F（CDF），有 $Pr(X_i \leq x)$, 对应的密度函数为 $f = F'$(PDF)。
- 竞拍者 i 知道 X_i 实现值 x_i, 但只知道其他人估价按 F 分布。
- 竞拍者是风险中性的，且足够有支付能力。
- 对于所有竞拍者来说估价分布都是相同的。

第二价格密封拍卖

假定第 i 个人对物品的估价为 x_i, 报价为 b_i。我们可以轻易将收益表示如下：

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - max_{j\neq i} b_j, & if\ b_i > max_{j\neq i} b_j \\ 0, & if\ b_i < max_{j\neq i} b_j \end{cases}$$

注：最高报价相同时，每个竞标者以相同概率获得物品。

那么，竞拍人 i 应该选择什么策略呢?

命题

在第二价格密封拍卖中，竞拍者按照 $\beta^{II}(x_i) = x_i$ 出价是一个弱占优策略。

证明

记 $p = max_{j \neq i} b_j, x_i$ 为竞拍人 i 对商品估价。

我们首先假设报价 $h_i > x_i$: 显然 $x_i < h_i < p$ 与 $p < x_i < h_i$ 没有区别，唯一有区别的是 $x_i < p < h_i$, 这时高报价虽然赢，但收益为 $x_i - p$, 亏了!

同理，假设 $h_i < x_i$: 显然 $h_i < x_i < p$ 与 $p < h_i < x_i$ 没有区别，唯一有区别的是 $h_i < p < x_i$, 这时真实价值有 $x_i - p$ 的正收入，但是低报价输了。

第二价格密封拍卖——期望支付

前面我们已经证明，二价拍卖的弱占优策略是报价 $\beta(x) = x$, 因此我们得出二价拍卖中，估价为 x 的竞拍者期望支付为：

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= Pr[\text{赢}] \times E[\text{第二高报价}|\text{x 是最高报价}] \\ &= Pr[\text{赢}] \times E[\text{第二高估价}|\text{x 是最高估价}] \\ &= G(x) \times E[\,Y_1 \,|\, Y_1 < x] \end{aligned}$$

最高顺序统计量（详见附录 C）

我们记 $Y_1 \equiv Y_1^{(N-1)}$ 为剩下 N-1 个竞拍者的最高报价，由 G 代表 Y_1 分布，(eg. $G(x) \equiv Pr[\,Y_1 < x]$, 原谅我不包含等号)

实际上，根据条件期望，我们还可以把这个式子写成

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= G(x) \times \frac{\int_0^x yg(y)\,dy}{\int_0^x g(y)\,dy} \\ &= G(x) \times \frac{\int_0^x yg(y)\,dy}{G(x)} \end{aligned}$$

第二价格密封拍卖——期望支付

$$= \int_0^x yg(y)\,dy$$

前面我们已经证明，二价拍卖的弱占优策略是报价 $\beta(x) = x$, 因此我们得出二价拍卖中，估价为 x 的竞拍者期望支付为：

$$m^{II}(x) = G(x) \times E[\,Y_1 \,|\, Y_1 < x]$$

实际上，根据条件期望，我们还可以把这个式子写成

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= G(x) \times \frac{\int_0^x yg(y)\,dy}{\int_0^x g(y)\,dy} \\ &= G(x) \times \frac{\int_0^x yg(y)\,dy}{G(x)} \\ &= \int_0^x yg(y)\,dy \end{aligned}$$

第一价格拍卖——初步思考

与第二价格相比，第一价格拍卖的竞拍者由于赢了直接支付自己的报价，策略似乎复杂一些：

- 报 $b > x$, 虽然赢了，但实际上亏了。
- 报 $b = x$, 输与赢（与甚至直接不参加拍卖）没有区别，毫无收益。
- 只能报 $b < x$, 可是究竟少多少呢？差值太少，收益渺渺；差值太大，胜算渺渺。

不妨想想从特殊到一般的方法，我们可以启发式地找到一个对称、递增、均衡的策略，然后再证明它是最优的策略即可。
我们假设除了某个竞拍者之外所有人都按照 β 报价，而该竞拍者报价是变量 b。显然，当 $\beta(Y_1) < b$ 时，他会赢。

第一价格拍卖——启发式推导

我们假设除了某个竞拍者之外所有人都按照 β 报价，而该竞拍者报价是变量 b。显然，当 $\beta(Y_1) < b$ 时，他会赢，此时 $Pr[\text{赢}] = Pr[\beta(Y_1) < b] = Pr[Y_1 < \beta^{-1}(b)] = G(\beta^{-1}(b))$，收益为：

$$\Pi = G(\beta^{-1}(b)) \times (x - b)$$

为了表示收益最大时的报价 b, 我们取一阶条件，即 $\Pi' = 0$，有：

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x - b) + G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

一阶条件满足时，有 $b = \beta(x)$, 带入：

$$\frac{g(x)}{\beta'(x)}(x - b) - G(x) = 0$$

第一价格拍卖——启发式推导

整理得

$$g(x)xdx = dG(x)\beta(x)$$

两边同时在 $[0,x]$ 上积分，因为 $G(0)\beta(0)=0$, 所以可以得到

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt \\ &= \frac{\int_0^x tg(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \\ &= E[\,Y_1 \mid Y_1 < x]\end{aligned}$$

现在我们已经启发式地求出来了第一价格拍卖的对称均衡策略，但还需要证明。

第一价格拍卖——对称递增均衡策略证明

命题

第一价格密封拍卖的对称均衡策略是

$$\beta^I(x) = E[Y_1 | Y_1 < x]$$

为了证明，我们可以假想估价为 x 的竞标人并没有报价 $\beta(x)$，而是发生了偏移，报价 $\beta(z)$，剩下的 N-1 人依然按照 β 报价。我们只需要将这种情况与“均衡”情况比较即可。
此时，收益为：

$$\begin{aligned}
\Pi[x, \beta(z)] &= G(z)(x - \beta(z)) \\
&= G(z)(x - E[Y_1 | Y_1 < z]) \\
&= G(z)(x - \frac{\int_0^z tg(t)\,dt}{\int_0^z g(t)\,dt}) \\
&= G(z)x - \int_0^z tg(t)\,dt
\end{aligned}$$

第一价格拍卖——对称递增均衡策略证明

$$\begin{aligned}\Pi[x,\beta(z)] &= G(z)x - \int_0^z tg(t)\,dt \\ &= G(z)x - \left(G(z)z - \int_0^z G(t)\,dt\right)\end{aligned}$$

另一种情况是正常地根据 β 报价，同理有：

$$\Pi[x,\beta(x)] = \int_0^x G(t)\,dt$$

对比，我们有：

$$\Pi[x,\beta(x)] - \Pi[x,\beta(z)] = G(z)(z-x) - \int_x^z G(t)\,dt$$

第一价格拍卖——对称递增均衡策略证明

由积分中值定理知，$G(z)(z-x)-\int_x^z G(t)\,dt \geq 0$。从下图也可以直观地看出来这一点：

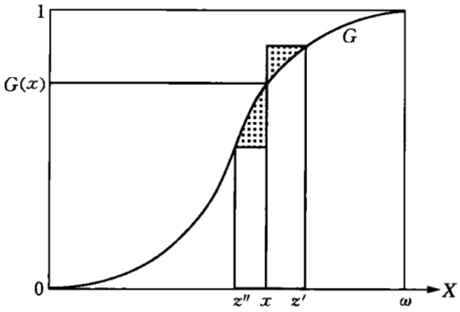

图 1: 第一价格密封拍卖报价过高或过低的损失

卖家期望收入

我们已经证明了对于一价拍卖，对称、递增、均衡的策略是：对于 x 这一估价的实现值，报价 $\beta^I(x) = E[Y_1 | Y_1 < x]$。

显然，我们可以计算出竞拍者的期望支付为
$m^I(x) = G(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x] = m^{II}(x)$

这说明了对于**相同的随机变量实现值 x**，一、二价拍卖对于竞拍者来说期望支付相同。站在卖家角度，期望收入就是从分布 F 中抽取 N 次，将每个人的收入求和即可，在连续的情况下就是积分。

一、二价拍卖卖家期望收入

注：此页的拍卖形式是一价或二价。

$$E[R] = N \times E[m(x)]$$

其中，

$$\begin{aligned} E[m(x)] &= \int_0^{\omega} f(x)m(x)\,dx \\ &= \int_0^{\omega} f(x)\int_0^{x} tg(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^{\omega} (\int_t^{\omega} f(x)\,dx)\,tg(t)\,dt \\ &= \int_0^{\omega} (F(\omega) - F(t))\,tg(t)\,dt \\ &= \int_0^{\omega} (1 - F(t))\,tg(t)\,dt \end{aligned}$$

乍一看形式复杂，实际上我们可以设：N 个报价中次高顺序统计量为 Y_2^N，其分布满足:

$$F_2^N(x) = F(x)^N + C_{(N,1)}(1 - F(x))F(x)^{N-1}$$

则对应密度函数为:

$$\begin{aligned} f_2^N(x) &= NF(x)^{N-1}f(x) - Nf(x)F(x)^{N-1} + N(N-1)(1-F(x))F(x)^{N-2}f(x) \\ &= N(N-1)(1-F(x))F(x)^{N-2}f(x) \end{aligned}$$

注意到:

$$f_1^N(x) = (F(x)^N)' = NF(x)^{N-1}f(x)$$

则 $f_1^{N-1}(x) = (N-1)F(x)^{N-2}f(x)$

一、二价拍卖卖家期望收入

我们自然可以将 $f_1^{N-1}(x)$ 代入到 $f_2^N(x)$ 中，有

$$\begin{aligned} f_2^N(x) &= N(1-F(x))f_1^{N-1}(x) \\ &= N(1-F(x))g(x) \end{aligned}$$

前面我们有 $E[m(x)] = \int_0^\omega (1-F(t))tg(t)dt$, 恰好可以代进去, 有

$$\begin{aligned} E[m(x)] &= \frac{1}{N}\int_0^\omega tf_2^N(t)dt \\ &= \frac{1}{N}E[Y_2^N] \end{aligned}$$

于是可以算出卖家期望收入:

$$E[R] = N \times E[m(x)] = E[Y_2^N]$$

一、二价拍卖收入特征比较

到这里我们会发现，一二价拍卖如果各方都能掌握最优策略，似乎不论对于买家还是卖家，**期望**收益都是完全一致的。但这应该是**期望**的意义，比如每天获得 50 元，与每天 1/2 概率获得 100 元期望一致，但风险却大大不同了。

事实上，直观来说一、二价拍卖的风险也不同。由于二价拍卖均衡即诚实报价，所以卖家收入在 $[0, \omega]$ 之间，而一价拍卖收敛一些，在 $[0, E[Y_1 | Y_1 < X]]$ 之间。因而，从卖方的角度，第二价格密封拍卖的风险是比第一价格密封拍卖要高的。

命题

在独立同分布的私有价值情形下，第二价格拍卖的均衡价格分布是第一价格拍卖均衡分布的均值保留展型。

一、二价拍卖风险分析

引理——均值保留展型

假设两个有随机 X,Y,X 遵循分布 F,Y 遵循分布 G，如果满足：

$$Y \overset{d}{=} X + Z$$

其中 $\overset{d}{=}$ 表示相同的分布，Z 是另外一个随机变量，它不一定独立于 X，只要求 $E[Z|X = x] = 0$。
我们就说 Y 是 X 的均值保留展型。

于是，我们实质上就是去证

$$E[R^{II}|R^{I} = p] = p$$

一、二价拍卖风险分析

我们知道，二价拍卖的收入是随机变量 $R^{II} = Y_2^N$, 一价拍卖是 $R^{II} = \beta(Y_1^N)$, 所以我们有：

$$
\begin{aligned}
E[R^{II}|R^I = p] &= E[Y_2^N|\beta(Y_1^N) = p] \\
&= E[Y_2^N|Y_1^N = \beta^{-1}(p)] \quad ** \\
&= E[Y_1^{N-1}|Y_1^{N-1} < \beta^{-1}(p)] \quad ** \\
&= \beta(\beta^{-1}(p)) \\
&= p
\end{aligned}
$$

** 处的数学证明可见附录，但是逻辑上很容易理解

显然，从均值保留展型的定义当中我们知道，二价拍卖的输入的随机变量分布方差是要比一价拍卖大的，**每一个规避风险的卖者相比于前一种拍卖会更喜欢后一种拍卖**

保留价格——期望支付分析

保留价格指买方所能接受的最高价格或卖方所能接受的最低价格，这里我们仅仅站在**卖家**的角度去考虑。我们主要关心在一价拍卖或二价拍卖中保留价格是否对卖家收入有影响，有怎样的影响。

比如说设置一个较小的保留价格 r，这样报价低于 r 的人即使拥有最高报价，依然无法获得物品。而报价超过 r 且持有最高报价的人需要支付 $max\{r, Y_1^{N-1}\}$。

我们自然可以表示出估价 $x > r$ 的人的期望支付（不考虑等号）：

$$m^{II}(x, r) = G(x) \times E[max\{Y_1^{N-1}, r\} | Y_1^{N-1} < x]$$

保留价格——期望支付分析

$$\begin{aligned}
m^{II}(x,r) &= G(x) \times E[max\{Y_1^{N-1}, r\} \mid Y_1^{N-1} < x] \\
&= G(x) \times \frac{\int_0^x max\{t,r\} g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \\
&= \int_0^x max\{t,r\} g(t)\,dt \\
&= \int_0^r max\{t,r\} g(t)\,dt + \int_r^x max\{t,r\} g(t)\,dt \\
&= rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt
\end{aligned}$$

保留价格——期望支付分析

一价拍卖也是极为类似的，报价大于 r 的卖家获胜则直接支付 $E[max\{Y_1^{N-1}, r\}|Y_1^{N-1} < x]$, 获胜概率为 G(x), 同样：

$$\begin{aligned} m^I(x, r) &= G(x) \times E[max\{Y_1^{N-1}, r\}|Y_1^{N-1} < x] \\ &= \ldots \qquad \text{(形式与二价完全相同)} \\ &= rG(r) + \int_r^x tg(t)dt \end{aligned}$$

于是我们发现，在有保留价格的情况下，一二价拍卖的期望支付也是相同的。

保留价格——卖家期望收入分析

为了研究什么样的保留价格是合适的，我们首先要以 r 为自变量表示出卖家的期望收入。前面我们已经证明一、二价期望收入相等，这里拍卖形式我们用 A 代指（A 为 I, II）。由于引入保留价格可能使商品卖不掉，我们记商品对卖家的价值为 x_0。我们有竞拍者估价是随机变量 X 时期望支付：

$$
\begin{aligned}
E[m^A(X,r)] &= \int_r^\omega m^A(x,r)f(x)\,dx \\
&= \int_r^\omega rG(r)f(x)\,dx + \int_r^\omega \int_r^x yg(y)f(x)\,dy dx \\
&= G(r)r(\int_r^\omega f(x)\,dx) + \int_r^\omega (\int_y^\omega f(x)\,dx) yg(y)\,dy \\
&= G(r)r(1-F(r)) + \int_r^\omega (1-F(y))yg(y)\,dy
\end{aligned}
$$

什么是合适的保留价格?

对于买家来说，收益 Π 为:

$$\begin{aligned}\Pi &= N \times E[m^A(X,r)] + F(r)^N x_0 \\ &= N \times \left(G(r)r(1-F(r)) + \int_r^{\omega}(1-F(y))yg(y)\,dy\right) + F(r)^N x_0\end{aligned}$$

我们对 r 求偏导，有

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi}{dr} &= NG(r)(1-F(r)) - G(r)rf(r) + Nx_0F(r)^{N-1}f(r) \\ &= N(1-(r-x_0)\lambda(r))(1-F(r))G(r)\end{aligned}$$

tip: 风险率 λ

$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$: 表示系统或个体在已存活到某个时间点 x 的情况下，在接下来的单位时间内失效的概率密度

保留价格——卖家期望收入分析

观察偏导 $N(1-(r-x_0)\lambda(r))(1-F(r))G(r)$, 我们发现:

- 如果 $x_0 = 0$, 那么当 $r = x_0 = 0$ 时，偏导为 0；当 r 稍稍大于 0 时，偏导大于 0。这意味着即使商品对卖家没有任何价值，他也要设置大于 0 的保留价格 (最优价格大于 0)。
- 如果 $x_0 > 0$, 那么当 $r = x_0$ 时，偏导大于 0，说明最优价格也要大于 x_0。

保留价格设置得比卖家自己的估价还要高，确实是相对反直觉的，当 $\frac{d\Pi}{dr} = 0$ 时，即取一阶条件，我们得到最优保留价格

$$r* - \frac{1}{\lambda(r*)} = x_0$$

显然 $r* > x_0$。

保留价格的利弊

除了保留价格，收“门票”“入场费”其实本质与保留价格一样……

我们说拍卖是否有效率，就是说它是否能把物品分配到估价最高的人手中。显然，保留价格一方面提高了卖家收入，但另一方面也损害了效率。

目录

定义标准模型

前面我们已经证明，一、二价拍卖的竞标者的期望支付和卖家的期望收入都是相同的。这不由得让我们产生一种思考：

是否存在某些拍卖形式，在一定标准下，它们的期望支付和卖者的期望收入是相同的?

首先定义**标准拍卖**：如果拍卖的规则规定了报价最高的那个人得到物品，那么我们就称这种拍卖是标准的。

收入等价原理

假设估价是独立且相同分布的，并且所有的竞拍者都是风险中性的。那么只要估价为 0 的竞拍者期望支付为 0，任何标准拍卖的对称递增均衡都会导致卖者获得相等的期望收入。

收益等价原理证明

与前面证明一价拍卖的对称递增均衡类似，我们假设除了某个竞拍者之外的所有竞拍者都遵守标准拍卖（形式为 A）的对称递增均衡策略 β,$m^A(x)$ 表示估价为 x 竞拍者的期望支付，$m^A(0)=0$。

同样，我们假设竞拍者对物品估价为 x, 但选择了 $\beta(z)$ 的报价——偏离了对称递增均衡。那么他的期望收益为:

$$\Pi(\beta(z),x) = G(z)x - m^A(z)$$

上述表达式中 z 为自变量，为了找到最大化期望收益策略，我们对 z 求一阶条件：

$$g(z)x - \frac{dm^A(z)}{dz} = 0$$

收益等价原理证明 (续)

$$g(z)x - \frac{dm^A(z)}{dz} = 0$$

在均衡中，应该按照 $\beta(z) = \beta(x)$ 报价，即 $z = x$, 我们有：

$$g(x)x = \frac{dm^A(x)}{dx}$$

两边同时在 $[0, x]$ 积分, 有：

$$\begin{aligned} m^A(x) &= m^A(0) + \int_0^x yg(y)\,dy \\ &= \int_0^x yg(y)\,dy \end{aligned}$$

我们发现在给定规则下，拍卖收入与形式无关！

收益等价原理利用：计算全支付拍卖均衡

我们可以把美国总统的选举看做一场拍卖（外加一些设定）：

拍卖的“物品”是总统的职位，我们假设竞选费用最高的党派将会拿下多数票，没有价值的候选人（党派）没有人会为其竞选有任何投资。

那么这种“拍卖”的特征在于：花在总统竞选的前是所有党派的沉没陈本，不论是否赢下大选都需要支付自己的报价，也就说，如果有 **对称、递增、均衡**策略，那么：

$$
\begin{aligned}
m^A(x) &= \beta(x) \\
&= \int_0^x y g(y)\, dy
\end{aligned}
$$

收益等价原理利用：计算全支付拍卖均衡

我们又又又可以用偏移的思想证明报价 $\beta(x) = \int_0^x yg(y)\,dy$ 是最优策略。假设对物品估价为 x 的竞拍者报价 $\beta(z)$，有

$$\begin{aligned}\Pi[x, \beta(z)] &= G(z)x - \beta(z) \\ &= G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)\,dy\end{aligned}$$

与之前的方法相同，我们有：

$$\Pi[x, \beta(x)] - \Pi[x, \beta(z)] = G(z)(z - x) - \int_x^z G(t)\,dt \geq 0$$

依然说明了 β 是对称递增均衡。

收益等价原理利用：计算三价拍卖均衡

三价拍卖与一、二价拍卖类似，唯一不同的在于报价最高的人将支付第三高的价格，我们可以假设其存在一个对称递增均衡。

我们假设竞拍者对物品估价为 x，由于获胜时支付的是第二高报价即 $\beta^{III}(Y_2)$，在对称、递增、均衡策略中，他获胜的概率是 $F_1^{N-1}(x)$，我们可以表示出其期望支付为：

$$m^{III}(x) = F_1^{N-1}(x)E[\beta^{III}(Y_2)|Y_1 < x] \quad (1)$$

同时，我们根据收益等价定理有

$$m^{III}(x) = \int_0^x yg(y)dy \quad (2)$$

联立 (1)(2) 两式求解……

收益等价原理利用：计算三价拍卖均衡

最终可以解得

$$\beta^{III}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}$$

命题

假设存在至少三个竞拍者，并且 F 是对数凹函数，那么第三价格拍卖的对称均衡策略是

$$\beta^{III}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}$$

进一步说明：

我们注意到，要满足对称、**递增**、均衡，则 $\beta^{III}(x)$ 要是递增的，一个充分条件是 F/f 递增。

$$
\begin{aligned}
&F/f\text{递增}\\
\Rightarrow &f/F\text{递减}\\
\Rightarrow &(ln(F))'\text{递减}\\
\Rightarrow &ln(F)\text{是凹函数}\\
\Rightarrow &F\text{是对数凹函数}
\end{aligned}
$$

另外，我们也能发现 $\beta^{III}(x) > x$，于是有

$$\beta^{I}(x) < \beta^{II}(x) = x < \beta^{III}(x)$$

总结

今天主要讲了:

- 一、二价拍卖的均衡策略
- 一、二价拍卖的期望支付 (相等)
- 一、二价拍卖的卖家期望收入
- 有保留价格情况下的期望支付
- 有保留价格情况下的卖家期望收入
- 将一、二价拍卖的收入等价推广至**标准**拍卖
- 利用“收益等价原理”分析全支付拍卖和三价拍卖