# 搜索赞助拍卖


**阳先毅**

**浙江大学计算机科学与技术学院**

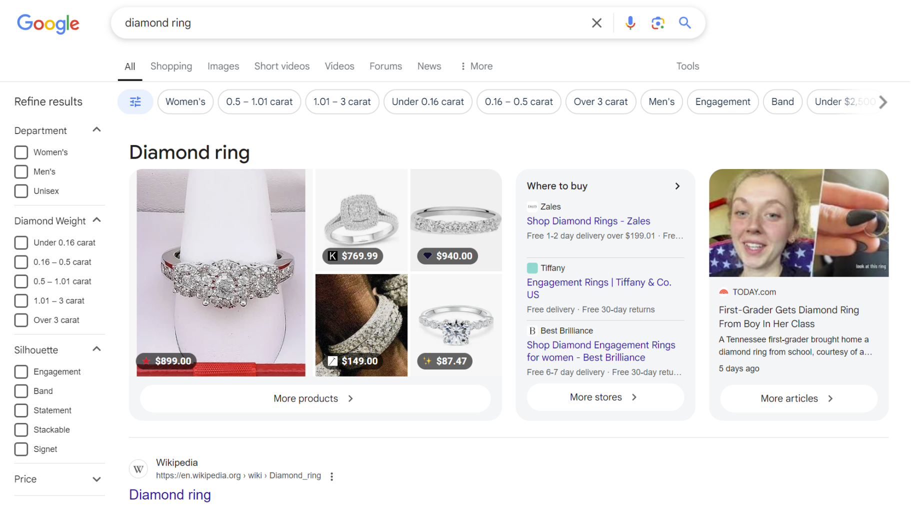
*879946238@qq.com*


**2025 年 4 月 11 日**

# 目录

# 目录

# 搜索赞助拍卖


Google
diamond ring
All
Shopping
Images
Short videos
Videos
Forums
News
More
Tools
Refine results
Women's
0.5 – 1.01 carat
1.01 – 3 carat
Under 0.16 carat
0.16 – 0.5 carat
Over 3 carat
Men's
Engagement
Band
Under $2,500
Department
Women's
Men's
Unisex
Diamond Weight
Under 0.16 carat
0.16 – 0.5 carat
0.5 – 1.01 carat
1.01 – 3 carat
Over 3 carat
Silhouette
Engagement
Band
Statement
Stackable
Signet
Price
Diamond ring
$899.00
$769.99
$940.00
$149.00
$87.47
More products
Where to buy
Zales
Shop Diamond Rings - Zales
Free 1-2 day delivery over $199.01 · Fre…
Tiffany
Engagement Rings | Tiffany & Co. US
Free delivery · Free 30-day returns
Best Brilliance
Shop Diamond Engagement Rings for women - Best Brilliance
Free 6-7 day delivery · Free 30-day retu…
More stores
TODAY.com
First-Grader Gets Diamond Ring From Boy In Her Class
A Tennessee first-grader brought home a diamond ring from school, courtesy of a…
5 days ago
More articles
Wikipedia
https://en.wikipedia.org › wiki › Diamond_ring
Diamond ring

# 搜索赞助拍卖——特点

互联网上的拍卖一半是针对**关键字**进行的，它有以下的特点：

- bidder（广告商）可以随意更改出价。
- 广告的 slot 是易腐的。
- 收费方式相较于传统的广告比较特殊，是按次计费。可以认为用户搜索时呈现广告为一次，也可以认为用户点击广告为一次，亦或是点击并最终购买算一次。一般是按照用户点击广告计费 (CPC)。

\$ 1994: 每次展示收费，方式由平台与广告商协商售价。
\$ 1997:Overture 引入广义一价拍卖（GFP）。
\$ 2002：Google 引入广义二价拍卖（GSP）。后续雅虎等效仿。

# 目录

# 广义一价拍卖（GFP）

假设有 N 个广告位，K 个竞拍人, 用 $\alpha_i$ 表示第 i 个广告位一定时间的点击数期望 (e.g. $\alpha = 200$ 表示一个小时点击 100 次), 其中 $\alpha_i > \alpha_j$ *if* $i < j$,$s_j$ 表示一次点击为广告商带来的价值。对于每个 $k$，广告商 $k$ 在时间 $t$ 之前为这个关键词提交的最后一个出价是 $b_k$；如果广告商 $k$ 没有提交出价，则设 $b_k = 0$。令 $b^{(j)}$ 和 $g^{(j)}$ 分别表示第 $j$ 高的广告商的出价和身份。

广义一价拍卖规定报价最高的人获得第一个广告位并支付其报价，报价第二高者获得第二个广告位并支付其报价......

| 广告位置 Rank | 广告主 | 出价(元) | 点击数 | 广义第一价格（GFP） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | 200 | 10*200=2000 |
| 2 | B | 6 | 100 | 6*100=600 |
| | C | 3 | ~ | |

# 广义一价拍卖（GFP）

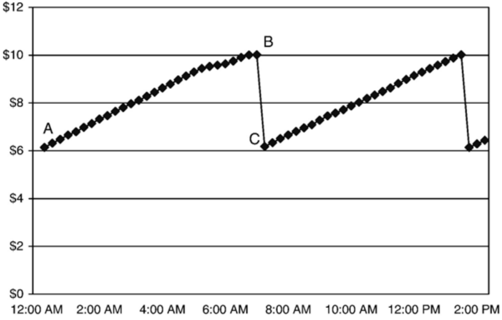
这样做会有什么问题呢?

这里以 2 个买家，2 个广告位举一个例子，假如买家 A 估值 6.0 元，买家 B 估值 10.0 元。买家 A 可能考虑一开始报价 1.0 元，此前 B 报价 0.8 元。B 看到后更改报价 1.1 元，A 看到后报价 1.2 元，B 报价 1.3 元...

直到 B 报价超过 6 元之后，$A$ 考虑报 0.1 元，往复进行......

在博弈中每个买家对剩余买家的最优应对一直在动态变化，难以达到一个均衡点。

# 广义一价拍卖（GFP）




(a) 14 hours

比如说上图对两个估价 $V_a, V_b(V_b < V_a)$ 的买家来说，如果最低出价为 $\epsilon$，停留在每个台阶上的时间相等，那么每次拍卖厂家的平均收入只有 $\frac{V_b+\epsilon}{2}$

# 广义二价拍卖（GFP）

广义二价拍卖对二价拍卖进行了扩展，任然考虑 N 个广告位，M 个广告商，第一名按第二名加一个最小竞价单位扣费（如 0.01 元），获得广告位 1、第二名按第三名加一个最小竞价单位扣费，获得广告位 2，以此类推...

| 广告位置 Rank | 广告主 | 出价(元) | 点击数 | 广义第二价格（GSP） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | 200 | 6*200=1200 |
| 2 | B | 6 | 100 | 3*100=300 |
|  | C | 3 | ~ |  |

$: 注意，上图省略了加上最小竞价单位的过程。比如说若将最小加价考虑在内则广告主 A 的支付为 $(6+0.01)\times 200$, 事实上这个最小加价就反应了他能占据这个广告位的最小报价。

# 广义二价拍卖的一些性质

- 真实报价可能不是占优策略。

  比如说考虑 N=2,K=3 的情况。其中 $s_1 = 10, s_2 = 8, s_3 = 5$。$\alpha_1 = 100, \alpha_2 = 70$。

  如果诚实报价，1 的收入为 $(10-8)*100 = 200$, 如果他放弃位置 1，转而报价 7.9，则他的收入为 $(10-5)*70 = 350$ 因此 1 有动机去谎报他的价值获利。

  当仅仅只有一个物品时，广义二价拍卖与二价拍卖等价，此时诚实占优。

# 广义二价拍卖的一些性质

- 即使达到了均衡，出价序列也不一定稳定。

  一种明确的策略是试图挤掉直接位于其上的玩家。假设广告商 $k$ 出价 $b_k$ 并被分配到位置 $i$，而广告商 $k'$ 出价 $b_{k'} \leq b_k$ 并被分配到位置 $i-1$。注意，如果 $k$ 略微提高出价，他自己的收益不会改变，但位于他上方的玩家的收益会减少。极限时它可以做到上方玩家收益趋于 0，如果上方玩家不能够“反击”，那么 k 就有动机挤掉他以获得更好的位置。

# 广告拍卖中的 VCG 机制

VCG 的分配位置的规则与 GSP 相同：位置 $i$ 分配给出价第 $i$ 高的广告商 $g(i)$。然而，支付金额是不同的。每个广告商的支付等于他对其他人造成的负外部性，假设出价等于实际价值。

因此，最后一个获得分配位置的广告商的支付与 GSP 下的相同：如果 $N \geq K$ 则为零；否则为 $\alpha_N b^{(N+1)}$。对于所有其他的 $i \leq \min\{N, K\}$，由 VCG 引起的支付 $p_V$ 将不同于由 GSP 引起的支付 $p$。具体来说，

$$p^{V,(i)} = (\alpha_i - \alpha_{i+1})b^{(i+1)} + p^{V,(i+1)}$$

# 广告拍卖中的 VCG 机制与 GSP 机制

我们继续考虑 N=2,K=3 的情况。其中 $s_1 = 10, s_2 = 8, s_3 = 5$。
$\alpha_1 = 100, \alpha_2 = 70$。
在 GSP 中，卖家收入为 $800 + 350 = 1150$, 在 VCG 中，卖家收入为 $(100 - 70) * 8 + 350 = 590$。
VCG 机制的卖家收入比 GSP 低，这是偶然吗?

**推论**

如果所有广告商在两种机制下出价相同，那么每个广告商在 GSP 机制下的支付至少会和在 VCG 机制下一样多。

# 广告拍卖中的 VCG 机制与 GSP 机制

可以从获得末尾广告位的人从后往前分析：

对于排名第 $i = \min\{N, K\}$ 位广告主，GSP 和 VCG 计费是一样的。如果 $K > N$，则其总计费为

$$P^{(i)} = P^{V,(i)} = a_N b_{N+1}$$

如果 $K \leq N$，则其计费为 0。
对于排名第 $i < \min\{N, K\}$ 位的广告主，

$$P^{V,(i)} - P^{V,(i+1)} = (\alpha_i - \alpha_{i+1})b^{(i+1)} \leq \alpha_i b^{(i+1)} - \alpha_{i+1} b^{(i+2)} = p^{(i)} - p^{(i+1)}$$

在广告主出价相同的情况下，使用 GSP 机制对任意广告主的扣费大于等于使用 VCG 机制的扣费，反过来 GSP 机制下广告平台的收益也大于等于 VCG 机制下的收益。

# 对 GSP 均衡的限制

GSP 的纳什均衡可以解读为以下两个不等式：

$$\alpha_i s_{g(i)} - \alpha_i b^{(i+1)} \geq \alpha_m s_{g(i)} - \alpha_m b^{(m+1)}$$

其中 m>i，注意：$\alpha_i b^{(i+1)}$ 可以表示为 $p^{(i)}$，于是有

$$\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_m s_{g(i)} - p^{(m)}$$

另一个不等式是：

$$\alpha_i s_{g(i)} - \alpha_i b^{(i+1)} \geq \alpha_m s_{g(i)} - \alpha_m b^{(m)}$$

其中 m<i, 注意右边的 $b^{(m)}\alpha_m$ 意味着他要按照被他超过的原先的第 m 位的报价支付。

# 对 GSP 均衡的限制

对于 m<i 的不等式，我们令 m=i-1, 并带入，有：

$$\alpha_i s_{g(i)} - \alpha_i b^{(i+1)} \geq \alpha_{i-1} s_{g(i)} - b^{(i-1)} \alpha_{i-1}$$

现在回想一下前面 GSP 的一个缺点，位于第 i 位的买家可以提高自己的价格来使得上一位 $(i-1)$ 的利润大幅减小，以期达到逼退他的效果。i-1 处的人应该怎么反制呢？如果他报一个比原现在第 i 位更低的价格，刚好使得自己与 i 的排名变换，如果此时原先提高价格的人的收益下降，那么 i-1 处的人就可以反制成功。
条件只比上面的不等式略强，即：

$$\alpha_i s_{g(i)} - \alpha_i b^{(i+1)} \geq \alpha_{i-1} s_{g(i)} - \alpha_{i-1} b^{(i)}$$

# 对 GSP 均衡的限制

现在这个加强的“约束”就可以被写作：

$$\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_{i-1} s_{g(i)} - p^{(i-1)}$$

这事实上就是与排名上一位买家交换位置不能获益的约束。

**局部无嫉妒均衡**

由 GSP 引起的同时行动博弈的均衡如果一个玩家不能通过与排名在他上面一位的玩家交换出价来提高自己的收益，则称为局部无嫉妒均衡。更正式地，在局部无嫉妒均衡中，对于任意 $i \leq \min\{N-1, K\}$，有：

$$\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_{i-1} s_{g(i)} - p^{(i-1)}$$

# 局部无嫉妒均衡的性质

**(1)**：可以实现 *assortive match*: 意味着估价更高的人被分配到了更高点击量的位置。

联立：

$$\alpha_{i+1}s_{g(i+1)} - p^{(i+1)} \geq \alpha_i s_{g(i+1)} - p^{(i)}$$

与

$$\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_{i+1}s_{g(i)} - p^{(i+1)}$$

有：

$$(\alpha_i - \alpha_{i+1})s_{g(i)} \geq (\alpha_i - \alpha_{i+1})s_{g(i+1)}$$

因为 $\alpha_i > \alpha_{i+1}$, 所以 $s_{g(i)} > s_{g(i+1)}$

# 局部无嫉妒均衡的性质

**(2)**：没有一个广告商与他前面若干位交换位置获得收益。

$$
\begin{aligned}
\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} &\geq \alpha_{i-1} s_{g(i)} - p^{(i-1)} \\
\alpha_{i-1} s_{g(i-1)} - p^{(i-1)} &\geq \alpha_{i-2} s_{g(i-1)} - p^{(i-2)} \\
&\ldots\ldots \\
\alpha_{m+1} s_{g(m+1)} - p^{(m+1)} &\geq \alpha_m s_{g(m+1)} - p^{(m)}
\end{aligned}
$$

全部联立有：

$$
\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_{i-1}\big(s_{g(i)} - s_{g(i-1)}\big) + \ldots +
$$
$$
\alpha_{m+1}\big(s_{g(m+2)} - s_{g(m+1)}\big) + \alpha_m s_{g(m+1)} - p^{(m)}
$$

把右边的所有 $\alpha_j$(其中 j>m)，换成 $\alpha_m$ 不改变等号方向，消去重复变量即有：

$$\alpha_i s_{g(i)} - p^{(i)} \geq \alpha_m s_{g(i)} - p^{(m)}$$

现在这个分配方式同样是一个稳定分配，没有人会想要被分配到其他的位置，反过来也是一样的

**引理**

任何稳定分配都可以由一个拍卖 $\Gamma$ 的无嫉妒均衡导出。

在稳定匹配中，必须满足估价高的人获得一个更靠前的广告位。(这也是 assortative match）不失一般性，我们可以假设广告商按其出价递减顺序标记（即，每当 $j<k$ 时，$s_j > s_k$)，并且广告商 $i$ 与位置 $i$ 匹配，相应的支付为 $p_i$。

# 局部无嫉妒均衡的性质

可以对这个结果构造一个局部无嫉妒均衡：$b_1 = s_1$，对于 i>1 的情况令 $b_i = p_{i-1}/\alpha_{i-1}$。

它满足：

- 每一个位置的人支付为 $\alpha_i \cdot b_{i+1} = p_i$
- 它确实是局部无嫉妒的，因为 $b_i > b_{i+1}$,$p_{i-1}/\alpha_{i-1} > p_i/\alpha_i$，则 $s_i - p_i/\alpha_i > s_i - p_{i-1}/\alpha_{i-1}$，则 $\alpha_i s_i - p_i > \alpha_{i-1} s_i - p_{i-1}$
- 它确实是均衡。
- 该均衡的分配本身就是 *assortive match*。

于是该无嫉妒均衡就满足了原先稳定分配的分配规则和支付规则。

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

我们需要构造出一种局部无嫉妒均衡，它满足

- 广告商的支付与 VCG 机制中占优策略（诚实报价）的支付是一样的。
- 对广告商来说这是最好的局部无嫉妒均衡，对搜索引擎来说这是最差的局部无嫉妒均衡。

考虑以下策略配置 $B^*$。不失一般性，假设广告商按其价值递减顺序标记，即如果 $j < k$，则 $s_j > s_k$。对于每个广告商 $j \in \{2, \ldots, \min\{N-1, K\}\}$，出价 $b_j^*$ 等于 $\frac{p^{V,(j-1)}}{\alpha_{j-1}}$，其中 $p^{V,(j-1)}$ 是在所有广告商都如实出价的情况下 VCG 机制中广告商 $j-1$ 的支付。出价 $b_1^*$ 等于 $s_1$。

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

## $B^*$ 的特征

策略配置 $B^*$ 是游戏 $\Gamma$ 的一个局部无嫉妒均衡。在这个均衡中，每个广告商的位置和支付等于由 VCG 机制引起的游戏中的占优策略均衡中的位置和支付。在游戏 $\Gamma$ 的任何其他局部无嫉妒均衡中，卖方的总收入至少与 $B^*$ 中的收入一样高。

我们必须首先证明这样一种策略配置并不会改变参与者在拍卖当中的排序（相较于 VCG 而言）。即对于任意 $j < min\{N, K\}$, 有 $b_j^* > b_{j+1}^*$，对于 $j \geq 2$ 而言，这相当于：

$$
\begin{aligned}
\frac{p^{V,(j-1)}}{\alpha_{j-1}} &> \frac{p^{V,(j)}}{\alpha_j} \\
\Rightarrow \frac{(\alpha_{j-1} - \alpha_j)s_j + p^{V,(j)}}{\alpha_{j-1}} &> \frac{p^{V,(j)}}{\alpha_j}
\end{aligned}
$$

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

$$
\begin{aligned}
&\frac{p^{V,(j-1)}}{\alpha_{j-1}} > \frac{p^{V,(j)}}{\alpha_j} \\
\Rightarrow &\frac{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j + p^{V,(j)}}{\alpha_{j-1}} > \frac{p^{V,(j)}}{\alpha_j} \\
\Rightarrow &\alpha_j(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j > (\alpha_{j-1}-\alpha_j)p^{V,(j)} \\
\Rightarrow &\alpha_j s_j > p^{V,(j)}
\end{aligned}
$$

对于 j=1 而言，这相当于：

$$
\begin{aligned}
&s_1 > \frac{p^{V,(1)}}{\alpha_1} \\
\Rightarrow &s_1\alpha_1 > p^{V,(1)}
\end{aligned}
$$

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

现在将证明原问题转化为了证明：$s_j\alpha_j > p^{V,(j)}$。

首先，对于 VCG 而言，有 $s_j\alpha_j \geq p^{V,(j)}$，考虑到 $s_j > s_{j+1}$，其差值 $\delta = s_j - s_{j+1}$，我们可以取 $\Delta < \delta$，假如 j 个竞拍者价值降低 $\Delta$，在 VCG 中支付不变，有：

$$p^{V,(j)} < \alpha_j(s_j - \Delta) < \alpha_j s_j$$

以上就证明了在该策略组下买家排位不会相较 VCG 发生变化，下面证明均衡：

**(1): 买家没有动机减少报价获得更靠后的位置。**

这是因为当他降低报价获得一个更靠后位置时，对应的支付相当于原 VCG 当中上报一个低价格的情况。由于 VCG 是激励相容的，所以他不会获得更多收益。

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

**(2): 买家没有动机增加报价获得更靠前的位置。**

升高报价稍有所不同，不能再映射回一个 VCG，**因为靠前一位的人此时报价是考虑到给 j 造成负外部性的情况。**但我们可以考虑他报价 $b' > b_j^*$, 使他获得了位置 $j' < j$, 则变换位置带来的收益为 $(\alpha_{j'} - \alpha_j)s_j - (\alpha_{j'} b_{j'}^* - a_j b_{j+1}) < (\alpha_{j'} - \alpha_j)s_j - (\alpha_{j'} b_{j'+1}^* - a_j b_{j+1})$, 右边可以替换成 $\sum_{i=j'}^{j-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})s_j - \sum_{i=j'}^{j-1}(p^{V,(i)} - p^{V,(i+1)})$, 进一步可以写为: $\sum_{i=j'}^{j-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})s_j - \sum_{i=j'}^{j-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})s_{i+1}$。现在可以看出等式右边小于等于 0，所以这个偏移并不会给 j 带来收益。

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

**现在说明这个构造是局部无嫉妒的**，即买家 j 没有动机与 j-1 交换。假如买家 j 与 j-1 交换，其收益为：
$(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j-(\alpha_{j-1}b_j^*-\alpha_j b_{j+1})=(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j-(p^{V,(j-1)}-p^{V,(j)})$
$=(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j-(\alpha_{j-1}-\alpha_j)s_j=0$, 因而这个均衡是局部无嫉妒的。

**最后来说明 $B*$ 在局部无嫉妒均衡中对于买家来说是最佳的，而对于浏览器来说是最差的。**考虑对应一个" 最大化买家收入" 局部无嫉妒均衡的稳定匹配，支付为 $p=(p_1,p_2,...,p_K)$, 而采用 VCG 机制讲实话的支付为 $p^V=(p_1^V,...,p_K^V)$, 前面我们的 $B^*$ 也将得到这个结果。

简便起见考虑 K+1 个人的情况 (实际上就是价值前 N+1 高的人。因为更多的人参与没有获得物品，也没有支付，对有支付的人也没有影响，可以把他们当成是观战的)。依然采用从后往前的思想，考虑最后支付的一个人支付至少为 $\alpha_K s_{K+1}$, 否则 K+1 位置的人希望与他交换位置，但在 VCG 中 $p_K^V$ 就是 $\alpha_K s_{K+1}$, 所以就最后一位支付而言它们是一致的。

# 利用 VCG 构造局部无嫉妒均衡

现在向前看，在稳定分配中，必须满足 $\alpha_K s_K - p_K \geq \alpha_{K-1} s_K - p_{K-1}$，否则 K 会希望与 K-1 互换位置。上式移项有 $p_{K-1} - p_K \geq (\alpha_{K-1} - \alpha_K) s_K$ **我们发现在 VCG 中** $p^V_{K-1} - p^V_K$ **正是右边。** 所以 VCG 的每一个"收费台阶"已经是满足稳定分配中最小的了。因而递推可以得知每一个位置 $p^V_j = p_j$，把它们求和就知道卖家的收入实际上就是最低收入，反过来，买家就是最佳的。

# 实际拍卖中的局部无嫉妒均衡条件分析

前面的基本模型假设每个广告商在同一位置的点击率是相同的，但是实际情况中点击率可能会受到广告质量影响。所以考虑新增一个只与广告商类型有关的因子 $\beta_k$, 则我们可以表示出第 k 个广告商的广告占据第 i 个位置的单位时间点击次数为 $\alpha_i\beta_k$。下面研究谷歌和雅虎二价拍卖中的不同。

**对于雅虎：**
在雅虎中，广告是按照出价进行排名的。如果存在局部无嫉妒均衡，意味着任何位置的人都不想与任何其他位置的人互换位置。表示如下，对任意的 i 和 j，有：

$$\alpha_i\beta_{g(i)}\left(s_{g(i)} - b^{(i+1)}\right) \geq \alpha_j\beta_{g(i)}\left(s_{g(i)} - b^{(j+1)}\right)$$

我们可以把两边的 $\beta_{g(i)}$ 约去，所以在雅虎当中这个局部无嫉妒均衡与 $\beta$ 因子无关，与基本模型相同。

# 实际拍卖中的局部无嫉妒均衡条件分析

谷歌则不同，在谷歌当中，广告商的排名是按照 $b\gamma$ 排的。其中 $\gamma$ 为谷歌对广告商的“质量评分”。e.g. g(1) 是有最大的 $b\gamma$ 的广告商，g(2) 是有次大的 $b\gamma$ 的广告商。第 i 个人的支付 $p^(i)$ 是使得他的质量排名刚刚超过后者质量排名的价格，所以 $p^{(i)} = \gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)} / \gamma_{g(i)}$。类似的，对任意的 i,j, 达到局部无嫉妒均衡的充要条件是：

$$\alpha_i \beta_{g(i)} (s_{g(i)} - \gamma_{g(i+1)} b_{g(i+1)} / \gamma_{g(i)}) \geq \alpha_j \beta_{g(i)} (s_{g(i)} - \gamma_{g(j+1)} b_{g(j+1)} / \gamma_{g(i)})$$

此时两边的 $\beta$ 同样是可以约去的。于是谷歌的模型的一个局部无嫉妒均衡结果 $\{\{b_k\}, \{\alpha_i\}, \{\gamma_k\}, \{s_k\}\}$，对应原始模型的 $\{\{\gamma_k b_k\}, \{\alpha_i\}, \{\gamma_k s_k\}\}$，分别是报价、CTRS、单次点击价值。

# 目录

# 广义英式拍卖

前面基础模型的局部无嫉妒均衡事实上需要买家彼此之间都知道他们的价值，这个过程可以由广义英式拍卖来提供。

在广义英式拍卖中，计时开始时的价格为 0，此时所有竞拍者都“举牌”，随着时间进行，价格上升。当竞拍者放下牌时，此时的价格就是他的报价。当倒数第二个竞拍者放下牌时，拍卖结束。最后剩余的竞拍者获得第一个广告位，支付倒数第二个的报价；倒数第二个竞拍者获得第二个广告位，支付倒数第三个人的报价……

在英式拍卖中，竞拍者放下牌的时候就会泄露他的个人信息，这为 GSP 中计算 VCG 支付提供了可行性。

# 广义英式拍卖

方便起见，假设有 $N \geq 2$ 个广告位和 $K \geq N-1$ 个广告商 (其他情况可以引入报价 0 的广告商作为“旁观者”)。点击率 $\alpha_i$ 是公共知识。每个人的价值都是满足 $[0, \omega]$ 上的一个分布 F, 每个广告商知道自己价值的实现值，但只知道其他所有广告商的服从的分布。

竞拍者应当根据什么做出策略呢?

- 场上剩余玩家数量, 记为 i。
- 每个位置的 CTRs, 为拍卖前就知道的值 $\alpha$。
- 拍卖的“历史”，即退出拍卖的报价序列 $h = (b_1, b_2, ..., b_{N+1})$
- 单次点击广告对自己的价值 s。

综上，策略可以描述为一个函数 $p_k(i, h, s_k)$, 表示 k 这个人退出的价格 (策略)。

# 广义英式拍卖

**定理**

在具有连续策略的广义英文拍卖中唯一的完美贝叶斯均衡中，具有价值 $s_k$ 的广告商在价格

$$p_k(i, h, s_k) = s_k - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(s_k - b_{i+1})$$

退出。在此均衡中，每个广告商的结果位置和收益与由 VCG 机制引起的游戏中的占优策略均衡相同。此均衡是事后均衡：每个广告商的策略是对其他广告商策略的最佳响应，无论他们的实际价值如何。

分析思路与“关联价值的英式拍卖”有相似之处，只不过不需要更新自己的价值，而是需要跟新自己的支付。显然，在拍卖的任何一个阶段，场上剩余的所有人唯一不同信息的依然只有自己的价值，所以点击价值高的人肯定会在点击价值低的人之后退出。

# 广义英式拍卖

当玩家位于博弈的某一个阶段中，它可以做如下心理盘算：

- 在这个价值下我退出的收益是多少?
- 在这个价值下我不退出的收益是多少?

前者实际上是 $\alpha_i(s-b_{i+1})$, 后者是不固定的——但是在拍卖我赢下来的事后是完全固定的，比如说此时此刻，价值为 p，我赢下来这一阶段 (即有人在价值 p 退出) 之后收益至少为 $\alpha_{i-1}(s-p)$ (大不了赢下这一阶段后直接退出)。所以只要在这一阶段中，有 $\alpha_i(s-b_{i+1})<\alpha_{i-1}(s-p)$ 我就该坚持。

直到某一阶段存在 $\alpha_j(s-b_{j+1})=\alpha_{j-1}(s-p)$, 此时达到 "无差异状态"，应该退出。否则当其他人在此阶段退出时，他进入下一个阶段后立即退出也会吃亏，进入下下个阶段也是类似——意味着价值比他高的人也会退出，他便会进入下一个吃亏的阶段。

# 广义英式拍卖

所以我们自然得到了退出的价格 p，为了区别各个阶段，记作 $p(i, h, s)$，表示剩余 i 人，退出历史为 h，买家价值为 s 所以无差异时：

$$\alpha_{i-1}(s - p(i, b_{i+1}, s)) = \alpha_i(s - b_{i+1})$$

移项得

$$p(i, h, s) = s - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(s - b_{i+1})$$

# 广义英式拍卖

下面我们来看此拍卖下的支付情况：

当场上还剩 N+1 个买家时，最低价值的买家将会在 $p = s$ 退出，因为此时没有 $\alpha_{N+1} = 0$, 同时可以认为开始拍卖时 $b_{N+2} = 0$, 所以有 $p^{V,(N)} = p^{E,(N)} = \alpha_N s_{N+1}$。注意到这一次退出的人的价格实际上是下一个的人单次支付，所以有对于第 i 来说，他给 i-1 创造的支付为：

$$
\begin{aligned}
p^{E,(i-1)} &= \alpha_{i-1} p(i, h, s_i) \\
&= \alpha_{i-1}\left(s_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(s_i - b_{i+1})\right) \\
&= s_i(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \alpha_i b_{i+1}
\end{aligned}
$$

注意到上式的 $b_{i+1}$ 实际上是 $p^{E,(i)}/\alpha_i$, 所以上式可以写成：

$$
p^{E,(i-1)} = s_i(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + p^{E,(i)}
$$

# 广义英式拍卖

上式与 VCG 占优策略均衡的支付形式是完全一致的，且我们已经说明 $p^{V,(N)} = p^{E,(N)}$，所以每个支付的差值都相同，则所有人的支付之和与 VCG 的占优策略均衡也是相同的。

所以说谷歌为什么选择 GSP?

- GSP 相较于 VCG 更容易向用户解释。
- GSP 收入确实要高一些。

# 广义英式拍卖

参考：

Strategic bidder behavior in sponsored search auctions

Internet Advertising and the Generalized Second-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords

Youtube:VCG & GSP Auctions in Sponsored Search Markets

ECO 426 (Market Design) - Lecture 11