拍卖理论第二讲

阳先毅

浙江大学计算机科学与技术学院

azusaissoooocute@gmail.com

2025 年 3 月 14 日

目录

目录

物品的分配

在上一节课中，我们分别站在卖家与买家的角度讨论了一二价拍卖的收益与均衡策略，并得出了收益等价原理，在满足以下条件下：

- 给定竞拍者的估价是独立同分布
- 竞拍者是风险中性的
- 估价实现值 x 为 0 的竞拍者期望支付为 0

任何标准拍卖的对称递增均衡会导致相等的期望收入。

但现实情况下未必有这么多条件可以满足，我们希望放松这个条件，研究更加一般情况下的物品分配方式（这里是单物品），并且研究这些机制能否具有某些优秀的性质：

物品的分配

- (站在卖家角度）是否最大化卖家收益?
- (站在社会角度）是否最大化社会福利?
- 是否满足个人理性?
- 是否是激励相同 (IC) 的, 特别是占优策略激励相容 (DISC) 的?
- 是否有效率，预算是否平衡，可实现性强不强……

具体的拍卖形式多种多样，但我们可以抽象成三个部分：买家根据自身情况报价，机制决定每个买家获得物品的概率，机制决定每个买家的期望支付。下一页会给出具体定义：

单物品模型建立

$\mathcal{N} = \{1, 2, 3...N\}$:N 个潜在买家的集合。
卖家对物品的估值为 0。
物品对买家有私有价值，且价值是独立的。
$\mathcal{X}_i$: 买家 i 对物品的估值，$\mathcal{X}_i \in [0, \omega_i]$, 分布函数为 F_i, 密度函数为 f_i
$\mathcal{X} = \times_{j=1}^{N} \mathcal{X}_j$: 所有买家估价的积。
$f(\mathbf{x})$:$(x_1, x_2, ...x_N)$ 的联合密度函数，因为每个人的估价满足独立，所以
$f(x) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times f_3(x_3) \times ... \times f_N(x_N)$, 定义 $f_{-i}(x_{-i})$ 为
$x_{-i} = (x_1, x_2, x_3...x_N)$ 的联合密度函数。

在以上的前提下，出售机制可以被归纳为一个三元组 $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$

- $\pi : \mathcal{B} \to \Delta$ 其中 Δ 是概率分布集合
- $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^N$

单物品模型建立——一个例子

为了方便理解这一三元组，这里我们以一价拍卖举一个例子：

我们假设一价拍卖的报价的集合为 $\mathcal{B}$, 那么它对应的配置规则和支付规则分别为：

- $b_i > max_{j \neq i} b_j$ 时，$\pi_i(b) = 1$; 当 $b_i < max_{j \neq i} b_j$ 时，$\pi_i(b) = 0$
- $b_i > max_{j \neq i} b_j$ 时，$\mu_i(b) = b$; 当 $b_i < max_{j \neq i} b_j$ 时，$\mu_i(b) = 0$

上一次我们已经定义了均衡策略 β, 这里进行进一步阐明：对所有的 i 和 x_i，给定其他买家策略 β_{-i},$\beta_i(x_i)$ 最大化 i 的期望收益，那么我们就说策略 β_i 构成一个均衡。

直接机制

定义

直接机制是指参与人直接声明自己的类型的机制。

比如说，在拍卖当中，每个人估值就是每个人的“类型”，而在前面的拍卖中，每个人都通过报价 $b_i = \beta_i(x_i)$ 参与拍卖，那么在直接机制中,$\mathcal{B}_i = \mathcal{X}_i$, 即从报告“报价”变为直接报告估价。

下面我们就可以正式地给出直接机制的描述了：直接机制 (Q, M) 由一对函数 $Q : \mathcal{X} \to \Delta$ 和 $M : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$, 如果每个买方都显示他/她的真实估价是一个均衡，我们就说该机制有真实均衡 (truthful equilibrium)。

配对 $(Q(x), M(x))$ 表示机制在 x 处的结果。

显示原理

定义

给定一个机制和该机制的均衡，必定存在这样一种机制：
(1) 每个买方真实地报告他报告他或她的估价是一个均衡；
(2) 该机制的均衡与原始机制给定的均衡有相同的效果。

还有一种表示方式：任何贝叶斯博弈的任何贝叶斯纳什均衡，都可以重新表示为一个经过适当设计的说真话的直接机制。
可以这样理解，这里以拍卖为例：假设 $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, ...\beta_n^*)$，是原机制下的一个均衡，这意味对于每个 i 来说，β_i^* 都是 $(\beta_1^*, ...\beta_{i-1}^*, \beta_{i+1}^*, ..., \beta_n^*)$ 的最优反应。我们假设 $(\beta_1^*(x_1), \beta_2^*(x_2)...\beta_n^*(x_n))$ 构成了原先的贝叶斯纳什均衡，如果我的机制能够直接将竞拍者的报价 $(x_1, x_2...x_n)$ 按照 $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, ...\beta_n^*)$ 转化为 $(\beta_1^*(x_1'), \beta_2^*(x_2')...\beta_n^*(x_n'))$，这意味着竞拍者报价自己的价值即可达到均衡，反之则是偏移了这个均衡。

显示原理

看下面可以更容易理解：

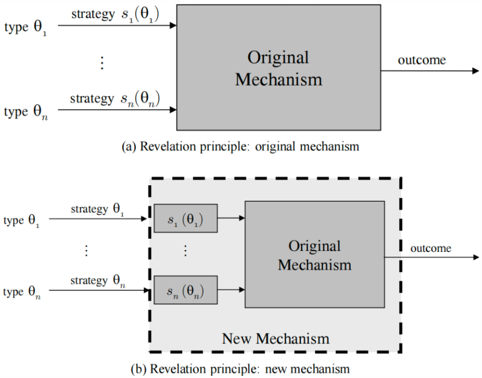


图 1: 也可以从复合函数的角度理解

贝叶斯激励相容

前面我们说明了在特定的直接机制机制下可以让竞拍者诚实报价，并达到原来的均衡。现在我们期望能够构造出这种均衡，并研究其中某些性质。我们将首先从较弱的均衡——贝叶斯纳什均衡（BIC）开始分析，然后给出较强的占优策略纳什均衡（DSIC）结果，这本质上是一致的。

我们直接从直接机制 (Q, M) 开始分析，其中 $Q : \mathcal{X} \to \Delta$，$M : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$。由于对 i 来说，他知道自己估价实现值 x_i，但是不知道别人的估价，而是只有一个分布信念（实际上处在就是不完全信息静态博弈的事中阶段)，所以可以写出第 i 个人的概率为：

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}-i} Q_i(z_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}$$

同样的，他的期望支付为：

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}$$

贝叶斯激励相容

显然，期望收益为：

$$U_i(z_i) = q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$$

激励相容

在拍卖中，如果每个竞拍者 i 如实报告自己的估价 x_i 是博弈的均衡，则称这一机制是激励相容的。

换句话说，如果一个人 i 他具有估价 x_i, 但选择报“估价” z_i, 则其收益为：

$$U_i(x_i, z_i) = q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$$

激励相容就要求：

$$U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i) = U_i(x_i, z_i)$$

贝叶斯激励相容

换句话说，激励相容的要求也可以被表示为

$$U_i(x_i) = \max_{z_i \in \mathcal{X}_i} \{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}$$

这是什么意思呢？意味着竞拍者 i 实际上是希望选择自己可选范围内的所有报价来使自己的收益最大化，每选定一个 z_i，就对应一条关于 x_i 的仿射函数，而 $U_i(x_i)$ 就是由这一簇仿射函数的逐点上确界构成，这正说明 U_i 是一个下凸函数 (convex)：

参考链接

这个性质非常重要。

贝叶斯激励相容

由于有贝叶斯激励相容，我们同样有

$$\begin{aligned} U_i(z_i) &\geq q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) \\ &= q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i) \\ &= U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i) \end{aligned}$$

考虑 t>0，我们可以令 $z_i = x_i + t$ 或 $z_i = x_i - t$，考察 U_i 在 x_i 附近的导数情况：

$$U_i(x_i + t) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)t$$

$$q_i(x_i) \leq \frac{U_i(x_i + t) - U_i(x_i)}{t}$$

$$q_i(x_i) \leq \frac{U_i(x_i - t) - U_i(x_i)}{-t}$$

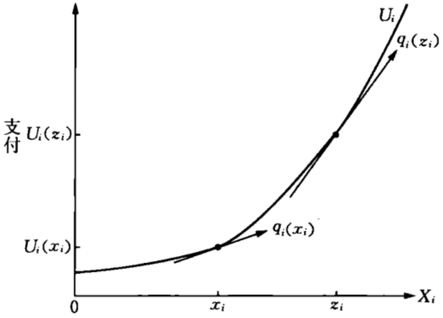
贝叶斯激励相容

当 $t \to 0$ 时，如果在该点可导，即左右导数相等

$$U_i'(x_i) = q_i(x_i)$$

如果左右导数不等，那么 $q_i(x_i)$ 是 U_i 在 x_i 处支撑线的斜率。

前面已经证明 U_i 是一个下凸 (convex) 函数，所以它几乎处处可导（不可导的点的测度为 0)，且有性质 q_i 单调不减，所以它可以大致画出来：

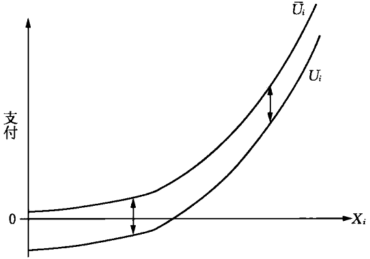


贝叶斯激励相容

可以把 $U_i(x_i)$ 写成定积分的形式：

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

$U_i(0)$ 是什么呢？其实就是 $q_i(0)\cdot 0 - m_i(0)$，即 $-m_i(0)$。这样我们就可以总结出一个规律，那就是假定两个激励相容机制 (Q,M) 和 $(Q,\bar{M})$，他们仅仅是支付规则不同，那么他们的收益函数形状是完全一致的 (毕竟影响形状的部分只有 q)，唯一不同的是它们在纵轴上的截距，其差值 $\bar{U}_i - U_i$ 是一个常量。



贝叶斯激励相容

前面我们是从贝叶斯激励相容出发，推出了 q_i 是单调不减的。同时我们还可以得到另一个性质：

收入等价

如果直接机制 (Q,M) 是激励相容的，那么对所有的 i 和 x，期望支付为

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

证明非常简单，前面已经有定义：

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

且 $U_i(x_i)$ 定义本身为

$$U_i(x_i) \equiv q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$$

贝叶斯激励相容

所以有 $U_i(0) = -m_i(0)$, 我们把 $U_i(x_i)$ 代到左边，有

$$q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) = -m_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

移项之后即可得到：

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

贝叶斯激励相容

现在我们看是否能从结论直接推出激励相容，同样假设 i 估价为 x_i, 报价为 z_i, 显然

$$
\begin{aligned}
U_i(x_i, z_i) &= q_i(z_i)x_i - m_i(z_i) \\
&= q_i(z_i)x_i - m_i(0) - q_i(z_i)z_i + \int_0^{z_i} q_i(t_i)\,dt_i
\end{aligned}
$$

同理，

$$
U_i(x_i, x_i) = -m_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i
$$

谎报带来的收益为：

$$
U_i(x_i, z_i) - U_i(x_i, x_i) = q_i(x_i)(z_i - x_i) - \int_{x_i}^{z_i} q_i(t_i)\,dt_i
$$

当 q_i 非递减时，我们可以直接由积分中值定理得到等式小于等于 0，于是我们也说明了激励相容。至此，当且仅当都说明完毕。

占优策略激励相容

事实上前面我们已经证明了贝叶斯纳什均衡下的激励相容，现在我们让条件再强一点，即竞拍者的诚实报价是占优策略的情况。

占优策略激励相容

一个机制是占优策略激励相容的，当且仅当分配规则和支付规则（Q,M）满足：

- q_i 单调不减。
- 对所有 i 和 x_i:

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)\,dt_i$$

实际上与上面的表达式完全一致。唯一的区别就是在不完全信息的情况下，$m_i(x_i)$ 要对其他人的报价进行考虑，所以写成一个联合密度函数积分的形式，而在若有占优策略，那么就不用考虑他人策略，就可以直接表示成 $m_i(x_i)$。

目录

最优机制

现在考虑卖家是机制设计者，显然他追求最高的期望收益。换句话说，追求最大化买家的期望支付之和。我们依然研究的是直接机制。

最优机制

最大化期望收入且满足激励相容和个人理性约束的机制。

个人理性 (IR)：$m_i(0) \leq 0$。估价为 0 的人不应该有正的支付。一般来说，不参与拍卖的收益为 0，但参与拍卖甚至会导致吃亏显然是不可思议的，所以这就是个人理性的约束。
机制的设计是在事前发生的，卖家只对每个人的价值的分布有一个信念，其联合密度函数为 $f_i(x_i)$，卖方期望收入表示为：

$$E[R] = \sum_{i \in \mathcal{N}} E[m_i(X_i)]$$

最优机制

下面我们对其中一个买家 i 进行考虑，他的期望支付为

$$E[m_i(X_i)] = \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i)\, dx_i$$

在激励相容下 $m_i(x_i)$ 我们是知道的，可以展开：

$$\begin{aligned} E[m_i(X_i)] &= \int_0^{\omega_i} [m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)\, dt_i] f_i(x_i)\, dx_i \\ &= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i)\, dx_i - \int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i)\, dt_i dx_i \end{aligned}$$

第三项的 $f_i(x_i)$ 是好积的，我们交换积分顺序，有

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i)\, dt_i dx_i &= \int_0^{\omega_i}\int_{t_i}^{\omega_i} q_i(t_i) f_i(x_i)\, dx_i dt_i \\ &= \int_0^{\omega_i} (1 - F_i(t_i)) q_i(t_i)\, dt_i \end{aligned}$$

最优机制

注意到积分区间相同，我们可以被积符号为 x_i, 带入到期望支付中，有：

$$
\begin{aligned}
E[m_i(X_i)] &= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i)\, dx_i \\
&= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(\int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(x_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i} \right) \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) f_i(x_i)\, dx_i \\
&= m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(x) f(x)\, dx
\end{aligned}
$$

我们想做的是最大化所有人的期望支付和，即

$$
\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(0) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(x) f(x)\, dx
$$

为了满足 IC,IR, 我们还需要限制 q_i 非递减以及 $m_i(0) \leq 0$

最优机制

上面的表示比较繁琐，为了简化，我们可以令

$$\psi_i(x_i) \equiv x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}$$

实际上 $\psi_i(x_i)$ 就是虚拟估价，非常容易证明 $E[\psi_i(X_i)] = 0$, 联系前面我们提到过的风险率，这里有 $\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1}{\lambda_i(x_i)}$。$\psi_i(x_i)$ 也有深刻的含义，比如说可以表示“每增加一单位售出概率所带来的对卖家的边际收益”，但是我们这里不做展开。另外，为了讨论方便，我们进行一点简化：假设这个机制设计问题是常规的，即 ψ 对任意买家都是递增的。显然，一个充分条件是风险率 $\lambda_i(x_i)$ 随 x_i 递增。
于是我们的目标变成了简写为最大化：

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(x) \right) f(x) \, dx$$

最优机制

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(x) \right) f(x) dx$$

显然，我们应该考虑 $\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(x)$ 这一项，它实际上就是虚拟价值的加权平均。一种非常直接的想法就是，我直接把这个物品分配给虚拟价值最高的人，前面说了，虚拟价值期望为 0，为了保证这一项为正，我们还需要限制最高的虚拟价值大于 0 时才进行售卖。有

$$Q_i(x) \geq 0 \Leftrightarrow \psi_i(x_i) = \max_{i \in \mathcal{N}} \psi_j(x_j) \geq 0$$

对于支付规则来说，我们希望同样希望最大化支付，但注意到要满足个人理性，所以可以对激励相容条件下的支付规则稍稍改造，即有：

$$M_i(x) = Q_i(x) x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, x_{-i}) dz_i$$

最优机制

现在我们就可以来验证其满足的特殊性质：
我们首先考察激励相容：注意到前面对 $Q_i(x) > 0$ 的等价条件以及正规性约束。给定其他买家的报价 x_{-i}, 如果报价 $z_i < x_i$，对应的虚拟价值 $\psi_i(z_i) < \psi_i(x_i)$(正规性条件)，由于分配规则将物品分配给虚拟价值最高的人，所以我们有 $Q(z_i, x_{-i}) \leq Q(x_i, x_{-i})$, 现在回到直接机制定义：

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}-i} Q_i(z_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}$$

我们显然有 $q_i(z_i) \leq q_i(x_i)$，这就满足**激励相容。**
另外如果第 i 个人的估价为 0，显然 $M_i(0, x_{-i})$ 为 0，这样也保证了**个人理性。**
最大化期望收入时，实际上就是希望把权重完全分配给虚拟价值最高的人，所以有期望收益最大值为：

$$E[max\{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2)...\psi_N(X_N), 0\}]$$

由于收益表达中两项都已经最大化，所以我们已经最大化了卖家期望收益。

最优机制

我们定义买家 i 赢得物品的最小价值：

$$y_i(x_{-i}) = \inf\{z_i : \psi_i(x_i) \geq 0 且 \forall j \neq i, \psi_i(z_i) \geq \psi_j(x_j)\}$$

分配规则可以简洁的表达为：

$$Q_i(z_i, x_{-i}) = \begin{cases} 1 \ \ if \ z_i > y_i(x_{-i}) \\ 0 \ \ if \ z_i < y_i(x_{-i}) \end{cases}$$

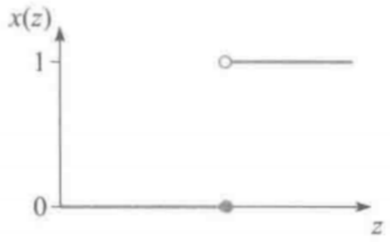


图 4: 分配规则

最优机制

看上图，有

$$\int_0^{x_i} Q_i(z_i, x_{-i})\, dz_i = \begin{cases} x_i - y_i(x_{-i}) & if\ x_i > y_i(x_{-i}) \\ 0 \quad if\ x_i < y_i(x_{-i}) \end{cases}$$

支付规则可以简写为：

$$M_i(x) = \begin{cases} y_i(x_{-i}) & if\ Q_i(x) = 1 \\ 0 \quad if\ Q_i(x) = 0 \end{cases}$$

最优机制

注意到我们最大化第二项的是有要求虚拟价值大于 0 才，出售，这实际上就设置了一个保留价格，如下：

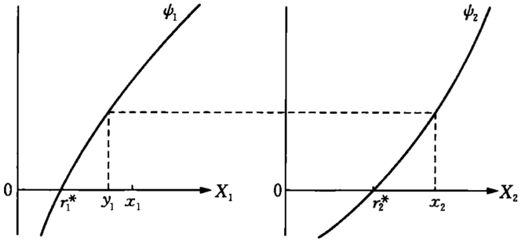


图 5: 一个两个人的例子

在这种情况下，$r_1^* = \psi_1^{-1}(0), r_2^* = \psi_2^{-1}(0)$ 物品将会分配给第一个人，其支付的价格为 y_1。

对称情况

假设机制设计是常规且对称的，带保留价格 $\psi^{-1}(0)$ 的第二价格拍卖为最优机制。

我们只需要验证分配规则和支付规则也满足即可，实际上就是解读出 $y_i(x_{-i})$

$$\begin{aligned} y_i(x_{-i}) &= inf\{z_i : \psi_i(z_i) \geq 0 \;\; and \; \forall j \neq i, \psi_i(z_i) \geq \psi_j(z_j)\} \\ &= inf\{z_i : \psi(z_i) \geq 0 \;\; and \; \forall j \neq i, \psi(z_i) \geq \psi(z_j)\} \\ &= inf\{z_i : z_i \geq \psi^{-1}(0) \;\; and \; \forall j \neq i, z_i \geq z_j\} \\ &= max\{\psi^{-1}(0), \max_{j \neq i} x_j\} \end{aligned}$$

只需要带回到分配规则和支付规则中就可以说明了。

一点补充

最优机制是无效率的，这源于两个方面：

- 设置了保留价格，可能卖不掉。
- 在不对称的情况下，虚拟价格高并不意味着估价就高。

目录

首先看从 wyy 的书中截取的一个例子：

（也就是第二价格拍卖）。在单物品拍卖中，假设所有竞拍者对物品的估值向量为 $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_n)$，DSIC 机制下报价向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}$。设物品分配规则为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$，则福利最大化机制设计问题可以表达为

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x}} \quad & \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant m \\
& x_i = 0,1 \quad i \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

不难看出这是一个简单的背包问题，其中要放进背包的物品是竞拍者，每个竞拍者都具有单位 1 的“质量”，背包容量为 m，竞拍者的“价值”就是其对拍卖品的估值。因此我们可以模仿动态规划的思想来理解这一问题的解。实际上，每个 x_i 都有 0 和 1 两种可能：

1. 当 $x_i=0$ 时，福利最大化的解等于求解其他 $n-1$ 个竞拍者的福利最大化问题，这一问题的最优解记为 $\mathrm{OPT}(-i,m)$，表示除 i 外的参与人拍卖 m 个物品的最优解；
2. 当 $x_i=1$ 时，福利最大化的解应当分为两部分，第一部分是竞拍者 i 的估值 t_i，第二部分是求解其他 $n-1$ 个竞拍者拍卖 $m-1$ 个物品的最优解 $\mathrm{OPT}(-i,m-1)$，即此时最优解为 $t_i+\mathrm{OPT}(-i,m-1)$。

在动态规划中，$x_i=1$ 成立当且仅当 $t_i+\mathrm{OPT}(-i,m-1)\geqslant \mathrm{OPT}(-i,m)$，即 $t_i \geqslant \mathrm{OPT}(-i,m)-\mathrm{OPT}(-i,m-1)$，由此得到了拍卖的关键值为 $\mathrm{OPT}(-i,m)-\mathrm{OPT}(-i,m-1)$，代入迈尔森支付公式可得到竞拍者 i 的支付也就是这一关键值。

图 6: 物品分配的动态规划

相关定义

当然我们这里说的是单物品拍卖，所以只有 1 个物品，对应的，配置规则 Q 表示的也不是某个物品是否分给谁，而是每个人获得这个物品的概率。同时，我们拓宽买家对物品估价的范围，现在是 $\mathcal{X}_i = [\alpha_i, \omega_i] \subset \mathbb{R}$。这里的 α_i 可以是负数，表示 i 厌恶这个物品。

我们现在就可以定义出单物品拍卖的有效率规则：我们称 $Q^* : \mathcal{X} \to \cdot$ 是有效率的，当他最大化社会福利时，有

$$Q^*(x) \in arg \max_{Q \in \Delta} \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j x_j$$

给定一个有效率的机制，社会福利最大值为：

$$W(x) \equiv \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(x) x_j$$

引入

于是在机制 Q^* 下，剩余所有人的福利之和为：

$$W_{-i}(x) \equiv \sum_{j \neq i} Q_j^*(x) x_j$$

** 简单来说，实际上就是如果 $x_i > max_{j \neq i} x_j$, 那么 $Q_i^* = 1, Q_j^* = 0$

VCG 机制支付规则

VCG 机制 (Q^*, M^V) 是有效率的机制，它的支付规则 $M^V : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$

$$M_I^V(x) = W(\alpha_i, x_{-i}) - W_{-i}(x)$$

为了更好地理解这个规则，下面举一个例

例

当 $\alpha_i = 0$ 时，VCG 与第二价格拍卖相同：

$$
\begin{aligned}
M_i^V(x) &= W(0, x_{-i}) - W_{-i}(x) \\
&= Q_i^*(0, x_{-i}) \cdot 0 + \sum_{j \neq i} Q_j^*(0, x_{-i}) x_j - \sum_{j \neq i} Q_j^*(x) x_j \\
&= 0 + max_{j \neq i} x_j - \begin{cases} 0 & if\ x_i > max_{j \neq i} x_j \\ max_{j \neq i} x_j & if\ x_i < max_{j \neq i} x_j \end{cases}
\end{aligned}
$$

VCG 机制的性质——占优激励相容

VCG 机制有很多优良的性质，包括 DSIC,IR, 有效率, 且是满足以上三个要求的机制中收入最高的，下面来一一证明：为证 DSIC，我们同样假设

估价为 x_i 的买家发生了一个偏移，报价为 z_i, 其他买家报价为 x_{-i}, 那么他的收益为：

$$
\begin{aligned}
U_i^V(x_i, z_i) &= Q_i^*(z_i, x_{-i})x_i - M_i^V(z_i, x_{-i}) \\
&= Q_i^*(z_i, x_{-i})x_i - W(\alpha_i, x_{-i}) + W_{-i}(z_i, x_{-i}) \\
&= Q_i^*(z_i, x_{-i})x_i - W(\alpha_i, x_{-i}) + \sum_{j \neq i} Q_j^*(z_i, x_{-i})x_j \\
&= \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(z_i, x_{-i})x_j - W(\alpha_i, x_{-i})
\end{aligned}
$$

$$
U_i^V(x_i, x_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(x_i, x_{-i})x_j - W(\alpha_i, x_{-i})
$$

VCG 机制的性质——占优激励相容

$$U_i^V(x_i, x_i) - U_i^V(x_i, z_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(x_i, x_{-i}) x_j - \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(z_i, x_{-i}) x_j$$

显然，$Q_j^*(x_i, x_{-i})$ 已经是最大化 $j \in \mathcal{N}$ 这些人福利的最优分配方式了，必然不小于后者，所以就证明了激励相容。

下面我们来证明它也满足个人理性。首先，

$$\begin{aligned} U_i^V(x_i, x_i) &= \sum_{j \in \mathcal{N}} Q_j^*(x_i, x_{-i}) x_j - W(\alpha_i, x_{-i}) \\ &= W(x) - W(\alpha_i, x_{-i}) \end{aligned}$$

我们可以得到对于买家 i，期望收益为：

$$U_i^V(x_i) = E[W(x_i, x_{-i}) - W(\alpha_i, x_{-i})]$$

VCG 机制的性质——个人理性、最大化期望支付

前面的激励相容说明了 $U_i^V(x_i)$ 是一个单调递增函数，而当报价 α_i 时，期望收益为 0，这就说明了 VCG 机制是个人理性的。

下面要说明 VCG 机制是满足个人理性、DSIC、有效率的基础上的最大化期望支付的机制：
我们假设存在另一个机制 (Q', M), 满足前三个条件。由于满足激励相容，我们知道 $U_i'(x_i) - U_i^V(x_i)$ 是一个常数，记为 c。无非有两种情况，一种是 $c < 0$, 对于这种情况由于有 $U_i^V(\alpha_i) = 0$, 这样 $U_i'(x_i) < 0$, 这就与个人理性矛盾了。另一种是 $c \geq 0$, 我们注意到有效率的机制分配规则是一样的，所以 $Q' \equiv Q*$, 不同的在于支付规则。而期望收益实际上是 $p_i(win)x_i - payment$ 买家的期望收益大了，意味着期望支付少了，这样就证完了。

VCG 机制的缺点

VCG 机制主要有两个缺点：

- 预算不平衡，也就是说参与者净支出之和不为 0，这取决于买家的估价。倘若某个物品所有人都非常讨厌，但为了“有效率”，将它分配给最不讨厌的人，这样参与者会被支付。
- 多物品时过于复杂，难以计算。单物品是简单的，但倘若有 n 个人分 m 个物品，则分配情况就有 n^m 种，难以计算。

接下来就讨论一个预算平衡的机制。

AGV 机制

定义

我们说一个机制是预算平衡的，就是说对于所有的 x，有

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} M_i(x) = 0$$

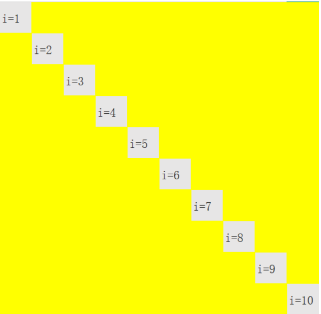
这里直接给出这一预算平衡机制（AGV）机制 (Q^*, M^A) 的定义式：

$$M_i^A(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} E_{x_{-j}}[W_{-j}(x_j, X_{-j})] - E_{x_{-i}}[W_{-i}(x_i, X_{-i})]$$

这个表达式感觉应该是故意构造出来的，由于分配规则采用 Q^*，已经满足了有效，现在我们说明它是预算平衡的。

AGV 机制

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathcal{N}} M_i^A(x) &= \frac{1}{N-1}\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\neq i} E_{x_{-j}}[W_{-j}(x_j, X_{-j})] - \sum_{i\in\mathcal{N}} E_{x_{-i}}[W_{-i}(x_i, X_{-i})] \\
&= \frac{1}{N-1}(N-1)\sum_{i\in\mathcal{N}} E_{x_{-j}}[W_{-j}(x_j, X_{-j})] - \sum_{i\in\mathcal{N}} E_{x_{-i}}[W_{-i}(x_i, X_{-i})] \\
&= 0
\end{aligned}$$



AGV 机制同时也是激励相容的。
我们这里讲普通的贝叶斯激励相容，所以假设其他人真实地报告估价 x_{-i}。但 i 拥有 x_i 的估价却报价 z_i，那么他的收益为：

$$\begin{aligned} U_i^A(x_i, z_i) &= E_{x_{-i}}[Q_i^*(z_i, X_{-i})x_i - M_i^A(z_i, X_{-i})] \\ &= E_{x_{-i}}[Q_i^*(z_i, X_{-i})x_i + W_{-i}(z_i, X_{-i})] - E_{x_{-i}}\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i} E_{x_{-i}}[W_{-j}(X_j, X_{-j})]\right] \end{aligned}$$

其中第二部分与报价无关，第一部分的

$$\begin{aligned} Q_i^*(z_i, X_{-i})x_i + W_{-i}(z_i, X_{-i}) &= Q_i^*(z_i, X_{-i})x_i + \sum_{j\neq i} Q_j^*(z_i, X_{-i})x_j \\ &= \sum_{j\in\mathcal{N}} Q_j^*(z_i, X_{-i})x_j \end{aligned}$$

前面说过在 $z_i = x_i$ 处取得最大值，所以证明了激励相容。

AGV 机制的缺点

AGV 机制满足有效、个人理性、预算平衡，但它却不一定满足个人理性约束，下面有一个简单的例子。

例

考虑 n 个人参与到一场单物品拍卖中，其中第 i 的人估价 $X \in [0, \omega]$，剩余 n-1 个人估价 $X_j = 0 (j \neq i)$。我们考虑 i 的期望支付 (当实现值 $x_i = 0$ 时)

$$E_{x_{-i}}[\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i} E_{x_{-j}}[W_{-j}(x_j, X_{-j})] - E_{x_{-i}}[W_{-i}(x_i, X_{-i})]]$$

显然 $W_{-i}(x_i, X_{-i})$ 为零，$W_{-j}(x_j, X_{-j})$ 就是 X_i，所以实际上可以化简为：

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} E[X_i]$$

期望支付可能为正，这样就不满足个人理性。

AGV 与 VCG 的融合

AGV 机制与 VCG 机制都满足预算平衡、有效率、激励相容、个人理性这四个优点的其中三个。是否有一种机制能够同时满足这四点呢?

命题

当且仅当 VCG 机制导致期望剩余时，存在一个预算平衡机制，它同时满足有效率、激励相容和个人理性。

这里不做具体推导，仅简略讲讲构造思路：事实上我们需要将 AGV 和 VCG 结合起来，显然依然要遵守 Q^*, 只能在 M 上做一下文章，这个“文章”实际上就是为了协调预算平衡和个人理性。当 VCG 机制有期望剩余时，它就相对 AGV 多出了正的期望收入，我们需要多出来的部分合理地在 M 中扣除，同时不破坏个人理性。