拍卖理论第三讲——相互依赖价值拍卖

阳先毅

浙江大学计算机科学与技术学院

879946238@qq.com

2025 年 3 月 28 日

目录

目录

基本介绍

这里我们对私有价值放宽。简单来说，每个人只知道物品对于自己的一部分价值信息，比如说，对于一辆汽车的价值评估，第一个人可能知道它发动机的部分信息，第二个人可能只知道内饰的信息，第三个人可能知道销量信息…… 我们把这些关于部分价值信息用随机变量实现。

我们定义第 i 个人的信号 (部分价值信息) 为 $X_i \in [0, \omega_i]$, 我们可以把物品价值记为：

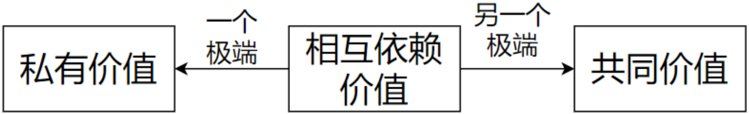
$$V_i = v_i(X_1, X_2, ..., X_N)$$

实际上，在拍卖中还有一些信息买家是不知道的，但是因为不是有效信息会在估价中被“推测”或干脆不考虑。于是定义**有效信息**为：

$$v_i(x_1, x_2, ..., x_N) = E[V_i | X_1 = x_1, X_2 = x_2, .., X_N = x_N]$$

假设它关于所有自变量都非递减，二阶连续可微。特别的，v_i 关于 X_i 是严格递增的。$v_i(0, 0, ..., 0) = 0$, 买者风险中性...

基本介绍



在上述定义下，注意到私有价值和共同价值是关联价值下的极端：

私有价值：

$$V_i = v(X_i)$$

共同价值：

$$V = v(X_1, X_2, ..., X_N)$$

研究情形——对称性

对称情况方便研究，因而先研究对称情况，所谓对称，即每个参与者 i 的的信号都来自同一区间 $[0, \omega]$, 同时他们的信号交换也不影响剩余人的价值，故我们可以把第 i 个人的价值写作：

$$v_i(X) = u(X_i, X_{-i})$$

为了简化，我们定义

$$v(x, y) = E[V_1|X_1 = x, Y_1 = y]$$

表示第 1 个人信号实现值为 x, 剩余 N-1 个人信号实现值的最高值为 y 时第 i 个人的价值。与前面类似，我们假设 v 关于 y 是非递减的，特别的，关于 x 是严格递增的。

研究情形——信号关联

我们在这里假设买家之间的信号是正关联的，即信号 $X_1, X_2, ..., X_N$ 之间正关联。简单来说，我从分布中抽取一组向量 $X = \{X_1, X_2, ..., X_N\}$，如果前面一部分的实现值较大，那么后面一部分信号的实现值较大的可能性更大。

更正式地说，假如从随机变量的分布中抽样出两组随机变量 x', x''，有

$$f(x' \vee x'')f(x' \wedge x'') \geq f(x')f(x'')$$

其中:

$$x' \vee x'' = (max(x'_1, x''_1), max(x'_2, x''_2), ..., , max(x'_n, x''_n))$$

$$x' \wedge x'' = (min(x'_1, x''_1), min(x'_2, x''_2), ..., , min(x'_n, x''_n))$$

信号关联可以推断出一些性质：
性质一： 将除了第一个人之外 $X_2, X_3, ..., X_N$ 从大到小排序为 $Y_1, Y_2, ..., y_{N-1}$，如果 $X_1, X_2, X_3, ...X_N$ 关联，那么 $X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{N-1}$ 也是关联的。
性质二： 如果 X 和 Y 关联，那么对于所有的 $x' \geq x, G(\bullet|x')$ 反风险率占优 $G(\bullet|x)$, 即对所有的 y 有

$$\frac{g(y|x')}{G(y|x')} \geq \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$$

性质三： 如果 γ 是任意递增函数，那么由 $x' > x$ 可以推出

$$E[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq E[\gamma(Y_1)|X_1 = x]$$

思路整理

前面的定义比较复杂，为了方便思考，这里简单概括一下：
当信号 $X_1, X_2, ..., X_N$ 之间关联时，

- 某些比较大时另一些比较大的概率较大，反之亦然。
- 假如一个函数有参数 X_i，那么当另外关联参数增加时，这个函数的期望是增加的。

再更一步不严谨的说，所谓关联就是自身改变时在期望上引起对方在同向改变...

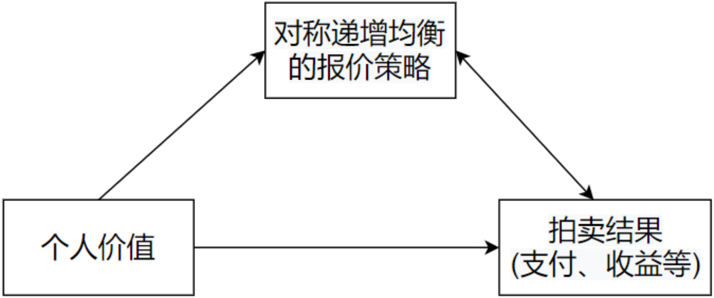
进一步厘清信号之间之间关联与价值关联的内核：

- 信号关联中某个信号的升高是对另一个信号**期望上**的升高
- 而信号升高对价值的升高则是确定的。

目录

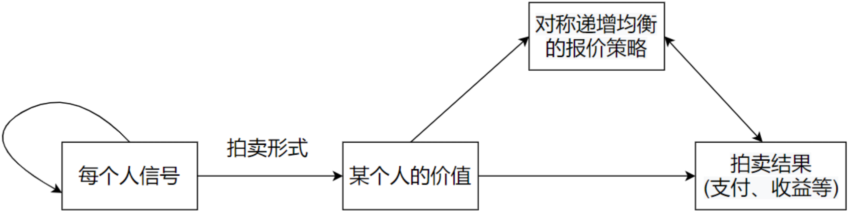
思路整理

书上对关联价值拍卖分析的脉络比较分散且混乱，我在这里对其进行梳理。我们先想想最开始的，私有价值下的拍卖是如何分析的：



那么在关联价值下呢?

思路整理



上图中最重要的一点是信号如何传递给买家 1 主要是依赖**拍卖形式。**我们下面要对一二价拍卖、英式拍卖进行分析，首要的是找到对称递增均衡策略。因而我们可以对拍卖结果考虑范围缩小，我们站在买家的角度，最大化期望收益。

第二价格拍卖

命题

第二价格拍卖的对称均衡策略为：

$$\beta(x) = v(x, x)$$

证明：同样考虑偏移，假设 $j \neq 1$ 采取 $\beta \equiv \beta^{II}$, 当竞拍者信号为 x 但报价为 b 时，他的期望收益为：

$$\begin{aligned}\Pi(b, x) &= \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - \beta(y))g(y|x)\,dy \\ &= \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - v(y, y))g(y|x)\,dy\end{aligned}$$

注意到 x>y 时 $v(x, y) - v(y, y) > 0$,x<y 时 $v(x, y) - v(y, y) < 0$。我们对 y 积分，因此积到 $v(x, y) - v(y, y) = 0$ 时取到最大值。即 $\beta^{-1}(b) = x$, 故 $b = \beta(x)$

英式拍卖

英式拍卖与第二价格密封拍卖相比，最大的特点是：**每一个买家都能够看到其他竞拍者的行为。**竞拍者可以在任意时刻退出，但一旦退出就不能以更高的报价重新参与拍卖，拍卖在仅剩一个人时结束，此时的价格就是他需要支付的价格。

在英式拍卖中，已经公布的信号是剩余买家的共同知识，他们唯一不同的是信号，所以当某个买家退出拍卖时，如果策略是对称均衡的，那么我们一定可以反推出他的信号。

因而当某个买家信号被获知时，拍卖进入下一阶段，所以英式拍卖对称均衡由 N-1 个函数 $\beta^k : [0,1] \times \mathbb{R}_+^{N-k} \to \mathbb{R}_+$, 其中 $1 < k \leq N$, 构成一个集 $\beta = (\beta^N, \beta^{N-1}, ..., \beta^2)$。其实每一个 β 都对应拍卖中的某种情况，比如说 $\beta^k(x, p_{k+1}, ..., p_N)$ 表示当前有 k 个竞拍者参与的情况，其中退出的 N-k 个竞拍者分别在价格 $p_{k+1} \geq p_{k+2} \geq ... \geq p_N$

英式拍卖

英式拍卖的对称均衡策略是非常容易推断的，假如我们能获胜，则我们一定可以知道所有人的私人信息，所以在拍卖正式开始之前，我们的价值为：

$$V_i = u(x, X_2, X_3, ..., X_N)$$

拍卖进行中，退出拍卖的人会暴露他们的信号，所以进行到某一步时

$$V_i = u(x, X_2', X_3', ..., x_{k+1}, ..., x_N)$$

后面的 $x_{k+1}, ..., x_N$ 已经被暴露。这对所有剩余买家都是一致的。假如此时价格为 p，**每个买家均可知道此时获胜时物品对他的价值。**即：

$$\hat{V}_i = u(x, p, p, p, .., x_{k+1}, ..., x_N)$$

他可以判断 $\hat{V}_i$ 与 p 的关系。显然，$\hat{V}_i < p$ 时，他不退出可能有利可图，所以他会继续参加拍卖。

英式拍卖

直到 $\hat{V}_i = p$ 时，他可以放弃参与。**此时他与其他同时放弃参与的人信号相同**，也就是说

$$\hat{V}_i = u(p, p, p, p, .., x_{k+1}, ..., x_N) = p$$

所以他的均衡策略就是在每一种 β 情况下——即竞拍者 N,N-1,...,k+1 已经分别在 $p_N, p_{N-1}, ..., p_{k+1}$ 退出拍卖，报价

$$\beta^N(x) = u(x, x, ..., x, x_{k+1}, ..., x_N)$$

其中 $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_N) = p_{k+1}$

以上就是英式拍卖的对称均衡策略，简单来说，在每一种情况下都假设剩余所有人的信号与自己相同，从而得到自己的效用并依据此报价。

英式拍卖

下面对上面得到的对称均衡策略进行更严格的证明：
考虑其他所有竞拍者都采取策略 β，定义 $Y_1, Y_2, ..., Y_{N-1}$ 分别为 $X_2, X_3, ..., X_N$ 中的最大值，第二大值,...，最小值。
因为获胜时 $x > y_1$，竞拍者 1 收益为：

$$u(x, y_1, y_2, ..., y_N) - u(y_1, y_1, y_2, ..., y_N) > 0$$

这已经是他获胜时的最佳情况。

当他失败时，一定有 $x < y_1$，这也是他失败的最好情况。如果他能赢下拍卖，意味着他将自己的信号 x 视作 $x' > y_1$ 报价，但支付依然满足上式，说明他吃亏了。
注意到在英式拍卖中，每个人并没有考虑其他人估价的分布并计算，也就是说当分布改变时，仍然是均衡，这构成了事后均衡，也是不后悔的内涵有待研究……

第一价格拍卖

第一价格拍卖中，买家除了知道自己的信号之外只知道一个他人的分布函数，由于赢下支付的是自己报价，所以只用考虑其他人中最高报价与他的报价的关系——这仅仅关系他是否赢下拍卖。

事实上，买家所能做的唯一事情就是根据关联性推断出在自己 x 下 Y_1 会是什么样的，并由此最大化自己的期望收益，这和前面的私有价值的第一价格拍卖也是类似的。

我们定义 $G(\bullet|x)$ 为当 $X_1 = x$ 下 $Y_1 \equiv max_{i\neq 1} X_i$ 的分布，$g(\bullet|x)$ 为对应的条件密度函数。假定存在对称均衡策略，当竞拍者信号为 x 并报价 $\beta(z)$ 时，他的期望收益为：

$$\begin{aligned}\Pi(z,x) &= \int_0^z (v(x,y)-\beta(z))g(y|x)\,dy \\ &= \int_0^z v(x,y)g(y|x)\,dy - \beta(z)G(z|x)\end{aligned}$$

第一价格拍卖

同样的，我们取一阶条件：

$$(v(x,z)-\beta(z))g(z|x)-\beta'(z)G(z|x)=0$$

我们实际上已经知道对称均衡的一个必要条件，z=x，带入

$$\beta'(x)=(v(x,x)-\beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}$$

补充一点细枝末节的东西，显然这里 β 是单调递增的，那么 $v(x,x)-\beta(x)\geq 0$，因为 $v(0,0)=0$，所以 $\beta(0,0)=0$

总而言之，就是解上面这个形如：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

第一价格拍卖

简单乘一个积分因子我们就可以解出这个方程：

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)\, dL(y|x)$$

其中

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt}$$

这个 $L(\bullet|x)$ 看上去比较奇怪，实际上是一个给定 x 下 y 的一个分布函数，支集为 $[0,x]$。这是因为它满足以下 3 条性质：

- $L(0|x) = 0$
- $L(x|x) = 1$
- $L(\bullet|x)$ 是非递减函数

第一价格拍卖

接上一页，第二个性质显然，第三个性质求导也是显然的，关键在于第一个性质。注意到信号的关联性，我们有反风险率占优, 即当 $x' > x$ 时：

$$\frac{g(y|x')}{G(y|x')} \geq \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$$

我们在满足 t>0 时稍微变换一下形式，有：

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \geq \frac{g(t|0)}{G(t|0)}$$

所以我们对 $L(\bullet|x)$ 中第一项取 0 时，有

$$-\int_0^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}\,dt \leq -\int_0^x \frac{g(t|0)}{G(t|0)}\,dt$$

第一价格拍卖

不等式右边可以凑出 $-\int_0^x \frac{d(lnG(t|0))}{dt}dt$，即 $-\int_0^x d(lnG(t|0))$，展开即为：

$$lnG(0|0) - lnG(x|0) = -\infty$$

所以就有 $L(0|x) = 0$。

观察 $L(\bullet|x)$ 表达式可知，如果 x'>x，有 $L(y|x') \leq L(y|x)$，也就是说 $L(\bullet|x')$ 随机占优 $L(\bullet|x)$。由于 v(y,y) 关于 y 递增，实际上它的期望在给定 x' 的条件下会高于给定 x 下的期望。这正是：

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)\, dL(y|x)$$

的形式，于是 β^I 是关于 x 的递增函数。

第一价格拍卖

前面绕来绕去**本质上是为了说明 β 是递增的**。尽管在设计之初这就是一个必须满足的条件。但由于我们是根据一节条件直接求解的，所以未必满足，当然，现在我们知道是满足的了。

现在才能够实现从价值到报价的推断。于是我可以表示期望利润：

$$\Pi(z, x) = \int_0^z (v(x, y) - \beta(z))\, g(y|x)\, dy$$

对第一个参数求导有，

$$\begin{aligned}\frac{\alpha \Pi}{\alpha z} &= (v(x, z) - \beta(z))\, g(z|x) - \beta'(z)\, G(z|x) \\ &= G(z|x)[(v(x, z) - \beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta'(z)]\end{aligned}$$

第一价格拍卖

注意到括号内一项只要替换为 x=z 即是前面我们求的一阶条件。所以当 z<x 时，$v(x,z) > v(z,z)$，同时

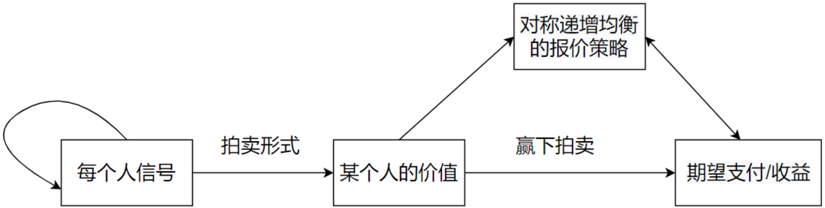
$$\frac{g(z|x)}{G(z|x)} \geq \frac{g(z|z)}{G(z|z)}$$

于是有 $\frac{\alpha \Pi}{\alpha z} > 0$，也就是说 z 提高会增加期望收益。

反之，当 z>x,$\frac{\alpha \Pi}{\alpha z} < 0$,z 下降会增加期望收益。于是就说明了 z=x 的情况下收益是最大的。

另外，当价值是私有时，v(y,y) 就是 y,$G(\bullet|x)$ 退化为 $G(\bullet)$，则 $L(y|x) = \frac{G(y)}{G(x)}$，带入前面式子可知均衡报价为 $E[Y_1|Y_1 < x]$，与私有价值结论一致。

前言



大体来说，为了方便比较收益情况，我们都假设某位买家（买家 1）赢下了拍卖，这样我们就不用考虑赢的概率以计算期望支付，而是直接考虑赢时支付。

英式拍卖 VS 第二价格拍卖

命题

英式拍卖获得的期望收入至少和第二价格拍卖获得的期望收入一样多。

二价拍卖的对称均衡策略为 $\beta^{II}=v(x,x)$，对于 N 个人来说，赢家需要支付第二高价格，即 Y_1，所以先考虑第二高价格的人报价，这里最高信号 x>y：

$$\begin{aligned} v(y,y) &= E[u(X_1,Y_1,Y_2,...,Y_{N-1})|X_1=y,Y_1=y] \\ &= E[u(Y_1,Y_1,Y_2,...,Y_{N-1})|X_1=y,Y_1=y] \\ &\leq E[u(Y_1,Y_1,Y_2,...,Y_{N-1})|X_1=x,Y_1=y] \end{aligned}$$

英式拍卖 VS 第二价格拍卖

那么第二价格拍卖的期望收入为：

$$
\begin{aligned}
E[R^{II}] &= E[\beta^{II}(Y_1)|X_1 > Y_1] \\
&= E[v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1] \\
&= E[E[u(Y_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{N-1})|X_1 = y, Y_1 = y]X_1 > Y_1] \\
&\leq E[E[u(Y_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{N-1})|X_1 = x, Y_1 = y]X_1 > Y_1] \\
&= E[u(Y_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{N-1})|X_1 > Y_1] \\
&= E[R^{Eng}]
\end{aligned}
$$

这样就说明了期望收入的关系为：英式拍卖不小于第二价格拍卖。

为了方便证明，这里我们给定买家信号 x 并考虑他赢下之后的收益，为什么可以这样做呢?
因为在第二价格拍卖与第一价格拍卖中，竞拍者赢下拍卖的概率就是他拥有最高信号的概率。

$$
\begin{aligned}
E[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] &= E[v(Y_1, Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] \\
&= \int_0^x v(y, y)\frac{g(y|x)}{G(x|x)}dy \\
&= \int_0^x v(y, y)\,d\frac{G(y|x)}{G(x|x)}
\end{aligned}
$$

可以记 $K(y|x) \equiv \frac{G(y|x)}{G(x|x)}$，这样第二价格拍卖获胜时的期望支付为

$$
E[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] = \int_0^x v(y, y)\,dK(y|x)
$$

第二价格拍卖 VS 第一价格拍卖

为什么要这样写呢？重要的原因在于它的形式就已经和

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)\,dL(y|x)$$

高度相似了。更重要的一点是，$K(\bullet|x)$ 也是一个支集 $[0,x]$ 的分布函数。所以我们证明的目标实际上就可以简化为证明 $K(\bullet|x)$ 随机占优 $L(\bullet|x)$
由于信号关联性，对 $t<x$, 有

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \leq \frac{g(t|x)}{G(t|x)}$$

两边积分，有

$$\begin{aligned}
-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}\,dt &\geq -\int_y^x \frac{g(t|x)}{G(t|x)} \\
&= -\int_y^x dlnG(t|x)
\end{aligned}$$

第二价格拍卖 VS 第一价格拍卖（续）

$$= lnG(y|x) - lnG(x|x)$$
$$= ln\frac{G(y|x)}{G(x|x)}$$

两边同时取以 e 为底的指数函数，有：

$$L(y|x) \geq K(y|x)$$

上面这个不等式是在 y<x 时成立的，因此就完成了 $K(\bullet|x)$ 随机占优 $L(\bullet|x)$ 的证明。
综上，可以得出

$$E[R^{Eng}] \geq E[R^{II}] \geq E[R^{I}]$$

目录

引入

在前面的三种拍卖形式当中，卖家收入不同的原因仅仅是源于拍卖形式不同，本质上是提供给买家的信息不同。更具体的说，是“拍卖过程中的信息”以及“赢下拍卖的支付信息”，对应事中与事后。我们假设某人获胜了，那么在 3 种形式下：

- 一价拍卖：事中不知道，事后仅仅能知道 Y_1 与自己的关系，支付自己的报价。
- 二价拍卖：事中不知道，事后不仅能知道 Y_1 与自己的关系，关键还能知道 Y_1 这一信息，因为它蕴含在支付中。
- 英式拍卖：每一阶段都能知道部分人信号，拍卖结束后可以知道所有人的信号。

收入排序原理

我们会想象收入的提高本质上是来源于什么呢?

本质上是因为公开的信号是关联的。

这里介绍一种比较简化的收入排序原理，首先我们假设对称均衡策略的存在，用 $W^A(z,x)$ 表示竞拍者 1 拥有信号 x，但是他按照 $\beta(z)$ 报价并获胜时，他需要支付的期望价格。比如说他按照 $\beta(x)$ 报价，那么他需要支付的价格就是 $W^A(x,x)$。

比如说在第一价格拍卖中，获胜者需要支付他的报价，因此

$$W^I(z,x) = \beta^I(z)$$

另外我们记 $W_1^A(z,x)$ 表示 $W^A(\bullet,\bullet)$ 关于它第一个自变量在 (z,x) 处的取值，$W_2^A(z,x)$ 表示 $W^A(\bullet,\bullet)$ 关于它第二个自变量在 (z,x) 处的取值。

收入排序原理

命题

用 A 和 B 表示两种拍卖，出价最高的竞拍者赢得拍卖并只有获胜的竞拍者支付一个正的数额。假设每种拍卖都有对称递增均衡，且满足：

- 对所有 x 有 $W_2^A(x,x) \geq W_2^B(x,x)$
- $W^A(0,0) = 0 = W^B(0,0)$。

那么 A 的期望收入至少和 B 的期望收入一样多。

证明：
考虑拍卖 A 中所有竞拍者 $j \neq i$ 都采取均衡策略 β^A。如果一个人信号为 x，但是报价为 $\beta^A(z)$, 那么他获胜的概率为

$$G(z|x) \equiv Prob[Y_1 < z|X_1 = x]$$

其期望收益依然是物品的期望价值减去他的期望支付，如下：

收入排序原理

$$\int_0^z v(x,y)g(y|x)\,dy - G(z|x)\,W^A(z,x)$$

在均衡时必然最大化了上述表达式，因此我们取一阶条件，

$$g(z|x)v(x,z) - g(z|x)\,W^A(z,x) - G(z|x)\,W_1^A(z,x) = 0$$

此时 z=x，所以可以带入 x 为：

$$g(x|x)v(x,x) - g(x|x)\,W^A(x,x) - G(x|x)\,W_1^A(x,x) = 0$$

于是我们可以表示出在两种拍卖形式下的一阶条件，稍作整理：

$$W_1^A(x,x) = \frac{g(x|x)}{G(x|x)}v(x,x) - \frac{g(x|x)}{G(x|x)}\,W^A(x,x)$$

$$W_1^B(x,x) = \frac{g(x|x)}{G(x|x)}v(x,x) - \frac{g(x|x)}{G(x|x)}\,W^B(x,x)$$

收入排序原理

用上式减去下式就可以表示出两种拍卖支付差的形式：

$$W_1^A(x,x) - W_1^B(x,x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\left[W^A(x,x) - W^B(x,x)\right] \quad (1)$$

我们记这个期望支付的差为：

$$\Delta(x) = W^A(x,x) - W^B(x,x) \quad (2)$$

则

$$\Delta'(x) = \left[W_1^A(x,x) - W_1^B(x,x)\right] + \left[W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)\right] \quad (3)$$

现在就又表示出了 (1) 式左端的部分，现在将 (3) 式带入 (1) 式，有

$$\Delta'(x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\Delta(x) + \left[W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)\right] \quad (4)$$

收入排序原理

$$\Delta'(x) = -\frac{g(x|x)}{G(x|x)}\Delta(x) + [W_2^A(x,x) - W_2^B(x,x)] \quad (4)$$

现在我们对这个式子进行讨论，假如 $\Delta(x) < 0$，由题设知 $\Delta'(x) > 0$，所以 $\Delta(x)$ 严格递增。由于 $W^A(0,0) = 0 = W^B(0,0)$，即 $\Delta(0) = 0$，所以肯定存在 t>0，使得 $\Delta(x) > 0$，这与假设不符，所以 $\Delta(x) \leq 0$

我们可以用一二价拍卖的结论验证一下收入排序原理，对于一价拍卖：

$$W^I(z,x) = \beta^I(z)$$

最终支付函数中第二项都没有出现，所以对于所有的 x 有 $W_2^I(x,x) = 0$。对于二价拍卖：

$$W^{II}(z,x) = E[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < z]$$

支付函数中 Y_1 与 x 关联，当 x 增加时，E 增加，所以 $W^{II}(x,x) \geq 0$

收入排序原理

$$W^{II}(x,x) \geq W^{I}(x,x)$$

所以二价拍卖的收入不少于一价拍卖。

最后，当信号是独立的时候，$W^A(z,x)$ 将会独立于 x, 这意味着一二价拍卖的期望收入相同。这说明私有价值假设对收入等价原理并不重要，只要信号是独立分布的，即使价值相互依赖收入等价原理也成立。

总结一下，想要提高收入，那么期望支付的表达式里就应该有更多或者更强的关联 x 的信号。

对买家：**赢家诅咒。**

简单来说就是买家不知道其他买家的信号实现值，就仅仅根据自己的信号估计价值，即 $E[V|X_1 = x]$, 但事实上，他赢下来时（事后）价值为 $E[V|X_1 = x, Y_1 < x]$, 这实际上降低了他的价值。

一个典型的例子是纯共同价值模型，比如矿权模型。假如每个竞拍者信号为 $X_i = V + \epsilon_i$, 假设所有 ϵ_i 独立同分布且 $E[\epsilon_i] = 0$, 那么对于所有人，$E[X_i| V = v] = v$, 但在一场拍卖中 $E[maxX_i| V = v] > v$, 所以当你报价与 X_i 非常接近时，你很可能会高估价值从而带来亏损。

对卖家：**信息公开。**

我们考虑卖家也拥有个人信息 S，且与 $X_1, X_2, ..., X_N$ 关联，竞拍者估价为：

$$V_i = v_i(S, X_1, X_2, ..., X_N)$$

假设 $v_i(0) = 0$, 上式可以简写成：

$$v_i(S, X) = u(S, X_I, X_{-i})$$

当信息不公开时，竞拍者只能推断 S，所以

$$v(x, y) = E[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y]$$

公开时，

$$\hat{v}(s, x, y) = E[V_1 | S = s, X_1 = x, Y_1 = y]$$

关联价值的一点启示

这里以第一价格拍卖为例：当公共信息可得时，竞拍者根据公共信息 S 和个人信息 S, X_i 按照对称均衡策略 $\hat{\beta}(S, X_i)$ 报价（如果对称均衡策略存在），假设 $\hat{\beta}(S, X_i)$ 关于两个自变量递增，当他接收到信号 x，但是他按照接收到 z 报价时，期望支付为：

$$\hat{W}^I(z, x) = E[\hat{\beta}(S, z) | X_1 = x]$$

显然有 $\hat{W}_2^I(z, x) \geq 0$，因为 S 和 X_1 关联，所以事实上公开信息就提高了一价拍卖的收入。