# 带约束的自动出价

**阳先毅**

**浙江大学计算机科学与技术学院**

*879946238@qq.com*

**2025 年 5 月 3 日**

# 目录

# 自动投标——概念

自动投标的动机在于提升投放效果并简化使用流程。其核心思想是：平台不再要求广告主为每个关键词精细出价，而是让广告主提供更高层次的目标和约束。自动投标代理便据此在实际投放时，将这些目标和约束转换成对各个查询的实时出价，基于对每一次潜在广告展示的效能预测。

**常见的约束有：**

- TCPA: 单次转化（这里以点击为例）的代价不超过点击收益的某个比值的条件下，最大化点击数。
- Budget Optimization: 在给定的预算内最大化点击次数。
- CPC：在单词点击的代价不超过某个值的前提下最大化点击次数。

# 自动投标——基本设定

集合设置:

- I：不同查询（或者印象）集合。
- A：竞拍者（广告商）集合。
- S：槽位（slot）集合。
- C: 约束集合。

参数设置:

- i:$i \in I$ 即某个特定查询。
- s:$s \in S$ 即槽位中的某个特定位置。
- c:$c \in C$ 即某个约束条件。
- $ctr^a_{is}$: 广告商 a 的广告在第 i 个查询的第 s 个广告位的点击率。
- $v^a_i$: 单次点击价值。
- $x^a_{is}$: 该位置是否被分配给广告商 a。

# 自动投标——目标函数

目标：最大化 $\sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_i$ 。

显然我们可以把约束写得能够表达尽可能多的情况，于是可以表示为下面的整数规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_i \\
\text{subject to} \quad & \forall c, \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} cpc_{is} \leq B_c + \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_{ic} \\
& \forall i, \sum_{s} x_{is} \leq 1 \\
& \forall i, s, x_{is} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

# 自动投标

前面的约束形式可以匹配哪些情况呢：

- **预算优化 (Budget Optimization)**：仅有一个约束 $c$，且 $\forall i, v_{ic} = 0$，而 $B_c$ 就是 BudgetB。因此约束简化为 $\sum_{i,s} x_{is}\,\mathrm{ctr}_{is}\,\mathrm{cpc}_{is} \leq B$. 可以令 $\forall i, v_i = 1$，此时目标即最大化点击次数。
- **TCPA)**：目标是在平均转化成本不超过给定阈值 $T$ 的前提下，最大化转化次数。这里 $B_c$ 为 0 $\forall i, v_{ic} = T \cdot v_i$ 此时该约束可写为 $\frac{\sum_{i,s} x_{is}\,\mathrm{ctr}_{is}\,\mathrm{cpc}_{is}}{\sum_{i,s} x_{is}\,\mathrm{ctr}_{is}\, v_i} \leq T$
- **TCPA 和 TCPC**：其实就是和前面一样的，比如 $B_c = 0$, 只不过这里还需要新增加 $v_{ic} = M$,M 即设定的 CPC 上限。

# 自动出价公式

前面的整数规划问题，难以求解，我们可以将其“松弛”为线性，并且可以用对偶问题求解：

Primal Linear Program

$$\max \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_i$$

$$\forall c, \ \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} cpc_{is} \leq B_c + \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_{ic}$$

$$\forall i, \ \sum_{s} x_{is} \leq 1$$

$$\forall i, s, x_{is} \ \geq 0$$

Dual Linear Program

$$\min \sum_{i} \delta_i + \sum_{c} \alpha_c B_c$$

$$\forall i, s \left| \begin{array}{c} \delta_i + \\ \sum_c \alpha_c ctr_{is}(cpc_{is} - v_{ic}) \end{array} \right\} \geq ctr_{is} v_i$$

$$\forall i, \ \delta_i \geq 0$$

$$\forall c, \ \alpha_c \geq 0$$

其中 $\alpha_c$ 是第一条约束的对偶变量，$\delta_i$ 是第二条约束的对偶变量。前者直观理解为放松 1 单位预算能带来的收益，后者直观理解为查询 i 的边际价值。

# 自动出价公式

我们记

$$\Delta_{is} = ctr_{is}v_i - \sum_c \alpha_c ctr_{is}(cpc_{is} - v_{ic})$$
$$= \sum_c \alpha_c ctr_{is}(\frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} - cpc_{is})$$

这样对偶约束改写为 $\forall i, s\ \delta_i \geq \Delta_{is}$。假设 $\{x_{is}\}, \{\alpha_c\}$ 是原问题和对偶问题的最优解，于是我们就可以引出下面的 5 条性质：

1. $\delta_i = max(0, max_s(\Delta_{is}))$。

显然，对偶目标是最小化 $\delta_i$, 所以我们需要使 $\delta_i$ 满足最大的约束即可，否则就还存在优化空间，所以有 $\delta_i = max(0, max_s(\Delta_{is}))$。

2. 如果 $\delta_i > 0$ 且存在唯一的 s 使得 $\delta_i = \Delta_{is}$，那么 $x_{is} = 1$。

由 1 知，$\delta_i > 0$ 时必有 $\delta_i = max_s(\Delta_{is})$, 如果仅针对 1 个 s 成立，由互补松弛定理知：$x_{is} > 0$，对其他槽位而言 $x_{is} = 0$。又有 $\sum_s x_{is} = 1$，自然对那个槽位 s 有 $x_{is} = 1$。

# 自动出价公式

3. 如果 $\delta_i = 0$ 且对所有 s，$\frac{v_i+\sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} < cpc_{is}$, 则 $x_{is} = 0$ 显然此时 $\delta_i = 0$ $\Delta_{is} < 0$, 所以 $\delta_i > \Delta_{is}$, 又由互补松弛定理 $x_{is} = 0$

4. 最多有 $|C|$ 个 $i$ 满足 $s \neq s'$ 使 $\Delta_{is} = \Delta_{is'} = \delta_i$。
这是因为每个满足上面条件 $\Delta_{is} = \Delta_{is'}$ 可以引出一条关于 $\alpha_c$ 的线性方程，由于约束有 $|C|$ 条，对偶变量有 $|C|$ 个，构成的 $\alpha-$ 空间最多能容纳 $|C|$ 个线性无关方程，所以 i 最多就为 $|C|$。

5. 最多有 $|C|$ 个 $i$ 满足 $\delta_i = 0$ 且存在 $\frac{v_i+\sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} = cpc_{is}$ 。
显然此时 $\Delta_{is} = 0, ctr_{is}v_i - \sum_c \alpha_c ctr_{is}(cpc_{is} - v_{ic}) = 0$ 同样是关于 $\alpha_c$ 的线性方程组，而独立的方程最多有 $|C|$ 条，所以此类 i 的数目也不能超过 $|C|$。

# 自动出价公式-得出

这里给出一个报价策略:

$$b(i) = \frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c}$$

我们可以这样的直观理解它:在诚实条件下,该价格可以使广告商得到相同的槽位 (slot)。
在诚实的拍卖中,竞拍者上报 $b_i$ 之后,会被分配到最大化其期望利润的槽位 (slot), 即最大化 $ctr_{is}(b_i - cpc_{is})$, 而不诚实的拍卖则可能使买家被分配到其他槽位。
于是我们便可以理解为什么选择报那样的 $b(i)$: 在 LP 中,我们分配到槽位 $s^*$, 即 $x_{is^*} = 1$,对应的对偶问题约束应该是紧的,即我们会被:

$$\max_s \sum_c \alpha_c ctr_{is}(\frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} - cpc_{is})$$

bound, 如果恰好报价里面的被减这一项,则 LP 的最优解就与诚实拍卖的目标一致了。

# 自动出价公式-得出 (续)

**定理一**

如果拍卖是诚实的，那么出价策略 $b(i)$ 所得到的解，其总价值至少为最优值 OPT 减去 $2|C|$ 个展示的价值，并且每个约束最多会在 $2|C|$ 个展示被违反。

前面说明了报价 $b(i) = \frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c}$ 可以达到线性规划中的最优解，但在诚实拍卖中有以下问题：

- 广告商不可能获得了 1/5 槽位 1,4/5 槽位 2。
- 对于某些利润为 0 的槽位，不会被分配出去。

以上两者正式线性规划与实际诚实拍卖当中的差异。

# 自动出价公式-得出 (续)

$$
\begin{aligned}
value\ of\ bidding\ strategy &\geq \sum_{\delta>0, unique\ s\ with\ \delta_i=\Delta_{is}} ctr_{is} v_i \\
&= \sum_{\delta>0, unique\ s\ with\ \delta_i=\Delta_{is}} x_{is} ctr_{is} v_i \\
&= \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_i - \sum_{\delta=0\ or\ \Delta_{is}=\Delta_{is'}} x_{is} ctr_{is} v_i \\
&\geq \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is} v_i - 2|C| max_{is} ctr_{is} v_i \\
&= OPT - 2|C| max_{is} ctr_{is} v_i
\end{aligned}
$$

我们减去的 2|C| 的 impression 价值是怎么来的呢？对于第一个 |C|，考虑到 $\Delta_{is} = \Delta_{is'}$ 的情况，在原始线性规划中可能会使 $0 < x_{is} < 1, 0 < x_{is'} < 1$, 但实际中只能分配一个，而这种情况最多有 $|C|$ 个，所以得到损失上界 $|C| max_{is} ctr_{is} v_i$。另一部分是 $\delta_i = 0$ 且 $\Delta_{is} = 0$ 的情况，在线性规划中可能被获取，但在拍卖中由于价值为 0 不会被分配到，所以损失上界为 $|C| max_{is} ctr_{is} v_i$。

# 投标算法

这部分作者用了 MWU 来解决线性规划的问题，如下所示：

$$Ax \geq b, x \in P$$

我们假设存在一个预言机 oracle,：对于任意给定的向量 c 和标量 d，该预言机能判断是否存在 $x \in P$, 使得 $c^T x \geq d$。MWU 算法在每一步维护一个与 A 行数相同的权重向量 w，并根据上一步解对各约束的违反程度乘法性地更新它。每一步再用新的权重向量提出检查 $w^T Ax \geq w^T b$

令 V 为 OPT 的上界，令 $V_c$ 为 $|B_c + \sum_{i,s} x_{is} ctr_{is}(v_{ic} - cpc_{iks})|$ 的上界，有以下结果：

**理论 2**

若迭代步数 $T \geq O(\frac{1}{\delta^3})$, 则算法收敛到一个解，满足：

- $value \geq OPT - \delta V$。
- 对于每条约束都有 $\sum_{i,s} x_{is} ctr_{is}(v_{ic} - cpc_{is}) \leq B_c + \delta V_c$

# 投标算法

算法如下所示：

**Algorithm 1.** Bidder

**for** $i = 1, \dots, O(\frac{1}{\delta})$ **do**

  $\mathcal{V}_{OPT} = i \cdot \delta \cdot \mathcal{V}$ (Guess for the value of $OPT$)

$$A = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots & ctr_{is}v_i/\mathcal{V} & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & ctr_{is}(v_{ic} - cpc_{is})/\mathcal{V}_c & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{OPT}/\mathcal{V} \\ \cdots \\ -B_c/\mathcal{V}_c \\ \cdots \end{pmatrix}$$

  Where each row (except first one) of $A$ corresponds to constraint $c$ and column for impression/slot $i, s$.

  $P$ be a convex constraints on $x_{is}$ denoting $0 \leq x_{is}$ and $\sum_s x_{is} \leq 1$.

  Run algorithm MWU to check feasibility of $Ax \geq b$ such that $x \in P$.

  **for** $t = 1, \dots T$ (Each step of MWU) **do**

    Let $w^t = (w_1^t, w_2^t, \dots)$ be the weight vector maintained by MWU.

    Let $\alpha_c = (w_{c+1}^t/\mathcal{V}_c)/(w_1^t/\mathcal{V})$

    Define oracle $O$ for $F = \exists ?x \in P : w^T Ax \geq w^T b$.

      - Run bidder with bidding strategy $\frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c}$

      - Let $x_{is} = 1$ if bidder won the impression at slot $s$, otherwise $x_{is} = 0$.

      - Check if this solution $\{x_{is}\}$ satisfies $w^T Ax \geq w^T b$

  **end for**

  If algorithm MWU returns infeasibility then break

**end for**

# 投标算法

原论文中没有对 MWU 进行任何描述，在这里做一点点补充：

**关于权重更新**：

- 权重向量 $w^t$ 是由 MWU 算法所维护的，我们把每一行都看做一个"专家"。
- 定义约束的"损失"为：$\bar{m}_i^{(t)} = a_i^T x^{(t)} - b_i$。
- 损失为正表示过度满足，权重下降；否则不满足，权重上升——从而让未来更多关注未被满足的约束。

**关于运行轮次**

- 外层循环 $\delta_i$ 次。
- 在 MWU 中每轮实际上运行 $O(\frac{1}{\delta^2})$

参考链接

We will use the MW algorithm to help solve LPs with $m$ constraints of the form

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supposing that we know $c^\top x^* = \text{OPT}$ (by binary search), we will aim to find an $\epsilon$-approximate solution $\widetilde{x}$ such that

$$\begin{aligned} c^\top \widetilde{x} &= \text{OPT} \\ A\widetilde{x} &\geq b - \epsilon\mathbf{1} \\ \widetilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

or output "infeasible" if no solution exists. The runtime for this will be $O\left(\frac{\rho^2 \log m}{\epsilon^2}\right)$ where $\rho$ is the "width" of the LP which will be defined shortly.

- 上面的 $\epsilon$ 和我们论文中的 $\delta$ 都是表示近似程度。

**关于近似性**

- 满足的两条近似也是直接从 MWU 搬来的

**关于 $\alpha_c$ 的选择**

- 算出来的，后面会说明。

# 投标算法

**现在有一个最关键的问题，在算法中运行投标算法后，我得到一个 $\hat{x}$ 向量，这个向量是否具有代表性。换言之，我解决**
$F = \exists ? x \in P : w^T A x \geq w^T b$ **是否与在这里验证** $w^T A \hat{x} \geq w^T b$ **等价?**
这确实是等价的，前提是我们设置了合理的 $\alpha$, 并按照 b(i) 报价，对于问题 F(我们把循环规定在 $OPT > i\delta V > OPT - \delta V$)，我们有：

$$
\begin{aligned}
w^T A x - w^T b = & \left( \sum_{i,s} \frac{w_1^t x_{is} ctr_{is} v_i}{V} + \sum_{i,s,c} \frac{w_{c+1}^t x_{is} ctr_{is} (v_{ic} - cpc_{is})}{V_c} \right) \\
& - \frac{w_1^t V_{OPT}}{V} + \sum_c \frac{w_{c+1}^t B_c}{V_c} \\
= & \frac{w_1^t}{V} \sum_c \alpha_c \sum_{i,s} x_{is}\, ctr_{is} \left( \frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} - cpc_{is} \right) \\
& - \frac{w_1^t V_{OPT}}{V} + \sum_c \frac{w_{c+1}^t B_c}{V_c}
\end{aligned}
$$

# 投标算法

我们发现当我们解决 F 时，就是判定 $max\{w^T Ax - w^T b\}$ 是否大于等于 0。而要最大化它，实际上就是要使得 $\frac{v_i + \sum_c \alpha_c v_{ic}}{\sum_c \alpha_c} - cpc_{is}$ 大于等于 0 时 $x_{is} = 1$, 小于等于 0 时 $x_{is} = 0$。我们发现我们按照 $b(i)$ 投标是符合这一点的：

**换言之，我们得到的 $\hat{x}$ 就是 $max\{w^T Ax - w^T b\}$ 时的 x。**

# Price of Anarchy

Price of Anarchy: 无秩序代价，在这里表现为所有买家都追求个人的“局部最优解”与全局最优解的比值。

我们将会证明：**局部最优解与全局最优解在目标函数上的比值至少是 1/2。**
我们采用流动性福利来作为目标函数，它是 Dobzinski 和 Leme（2014）提出的一个效率衡量指标，用于表示卖方在完全知晓所有投标人信息的前提下所能达到的最大收益，一般来说定义为

- *Liquid welfare*: $\text{LWEL} = \sum_{i\in[n]} \min\{B_i, \sum_{j\in[m]} x_{ij}\cdot v_{ij}/\tau_i\}$;
- *Revenue*: $\text{REV} = \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[m]} p_{ij}$.

#: 最下面指的是卖家收入

# Price of Anarchy

Observe that for each $i$,

$$\sum_{j\in[m]} p_{ij} \le \min\{B_i, \sum_{j\in[m]} x_{ij}\cdot v_{ij}/\tau_i\},$$

当预算约束或 $ROS$ 约束紧时，取等号，显然就是表示他的最大可能支付了。

不过在本论文中，大同小异（因为考虑更一般的情况），定义的流动性福利如下：

$$\sum_a \left(\min_c \left\{B_a^c + \sum_i x_{aic}\cdot \mathsf{ctr}_i \cdot v_{ic}^a\right\}\right)$$

令 OPT 表示最优算法所能达到的福利目标值，ALG 表示在均衡下算法的福利目标值。对于任意一组投标人子集 $S$，定义：OPT(S) 为集合 S 中的投标人在 OPT 贡献的福利，类似定义 ALG(S)。

# Price of Anarchy

我们记 $C(a)$ 为对广告主 a 来说是紧约束的集合，如果没有紧约束那么它就是空集。记 $A_1$ 为在均衡时完全不受限的广告主集合，$A_2$ 表示其余广告主集合。

由于 $A_1$ 中的人不收任何预算限制，他们可以报任意高价，并赢下所有他们认为有价值的定西，故对于 $a \in A_1$, 在 ALG 下的贡献为 $\sum_i v_i^a$, 这就是他可能为流动性福利目标函数做的最大贡献。

$$ALG(A_1) \geq OPT(A_1)$$

接下来我们将 $OPT(A_2)$ 拆分为两个部分，并分别分析上界。为此，定义：

- $O(a)$：在最优分配中被分配给广告主 $a$ 的展示集合；
- $A(a)$：在均衡分配中被分配给广告主 $a$ 的展示集合。

于是我们得到了以下三条性质：

**性质一**：对于某个广告主 $a$，其在均衡时的出价不低于基于 $C(a)$ 所索引的一组约束右边值的某种凸组合：

$$b^a(i) = \frac{v_i^a + \sum_c \alpha_c v_{ic}^a}{\sum_c \alpha_c} = \frac{v_i^a + \sum_{c \in C(a)} \alpha_c v_{ic}^a}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c} \geq \frac{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a v_{ic}^a}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a}$$

第一个等号成立，是因为在局部最优解中非紧约束对应的 $\alpha_c = 0$。据此我们可以表示出 $ALG$ 的一个下界。
首先，对广告主 a 来说，由于存在预算约束，所以：

$$\sum_i p_{ai} \leq \min_c \left\{ B_a^c + \sum_i x_{aic} \cdot \mathsf{ctr}_i \cdot v_{ic}^a \right\}$$

对所有广告主求和，即有：

$$ALG \geq Total\_ALG\_Spend$$

# Price of Anarchy

$$
\begin{aligned}
ALG &\geq Total\_ALG\_Spend \\
&\geq \sum_{a \in A_2} \sum_{i \in O(a) \cap A(a)} ALG\_Spend(i) \\
&\geq \sum_{a \in A_2} \sum_{i \in O(a) - A(a)} ctr_i^a b^a(i) \\
&\geq \sum_{a \in A_2} \sum_{i \in O(a) - A(a)} ctr_i^a \frac{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a v_{ic}^a}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a} \\
&= \sum_{a \in A_2} \frac{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a \sum_{i \in O(a) - A(a)} ctr_i^a v_{ic}^a}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

这里最为关键的是第三个大于等于号，可以直观解释为：ALG 在和 OPT 重叠的展示上已经付出了足够的“钱”，来抵消 OPT 中的这部分潜在支付。

**性质二**：广告主 $a$ 在均衡状态下的福利贡献，等于其在均衡状态下获得的所有展示对于任意 $c \in C(a)$ 的“c-类型”价值之和。这进一步意味着，其贡献也等于其在均衡分配下所获展示的、关于 $c \in C(a)$ 的所有 c-类型价值的任意凸线性组合之和。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ALG}(A_2) &= \sum_{a \in A_2} \frac{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a \left( B_c^a + \sum_{i \in A(a)} \mathrm{ctr}_i v_{ic}^a \right)}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a} \\
&\geq \sum_{a \in A_2} \frac{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a \left( B_c^a + \sum_{i \in O(a) \cap A(a)} \mathrm{ctr}_i v_{ic}^a \right)}{\sum_{c \in C(a)} \alpha_c^a}
\end{aligned}
$$

**性质三**：对于某个广告主 $a$，其在全局最优分配中的福利贡献不超过其在该分配下所获展示的“c-类型价值”的任意凸线性组合之和（其中 $c$ 可以是约束集合 $C$ 的任意子集，包括 $C(a)$）。

$$\begin{aligned}
\mathrm{OPT}(A_2) &= \sum_{a\in A_2}\left(B^a_{c'(a)} + \sum_i x^a_i \cdot \mathrm{ctr}_i v^a_{ic}\right) \\
&= \sum_{a\in A_2}\left(B^a_{c'(a)} + \sum_{i\in O(a)} \mathrm{ctr}_i v^a_{ic}\right) \\
&\leq \sum_{a\in A_2} \frac{\sum_{c\in C(a)} \alpha^a_c \left(B^a_c + \sum_{i\in O(a)} \mathrm{ctr}_i v^a_{ic}\right)}{\sum_{c\in C(a)} \alpha^a_c}
\end{aligned}$$

不等式的成立源自于凸线性组合的下界替换。

这样我们就可以很方便地把 opt 拆解成两部分求解

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OPT}(A_2) &\leq \sum_{a\in A_2} \frac{\sum_{c\in C(a)} \alpha_c^a \left(B_c^a + \sum_{i\in O(a)\cap A(a)} \mathrm{ctr}_i v_{ic}^a\right)}{\sum_{c\in C(a)} \alpha_c^a} \\
&+ \sum_{a\in A_2} \frac{\sum_{c\in C(a)} \alpha_c^a \sum_{i\in O(a)-A(a)} \mathrm{ctr}_i v_{ic}^a}{\sum_{c\in C(a)} \alpha_c^a} \\
&\leq \mathrm{ALG}(A_2) + \mathrm{ALG}
\end{aligned}
$$

结合前面的所有不等式，有

$$
\mathrm{ALG}(A_2) + \mathrm{ALG} + \mathrm{ALG}(A_1) \geq \mathrm{OPT}(A_1) + \mathrm{OPT}(A_2)
$$

我们有：

$$
2 \cdot \mathrm{ALG} \geq \mathrm{OPT}
$$

# Price of Anarchy——例子

有一个简单的例子来说明这个 1/2 的界是紧的，假设存在两个广告商 A=$\{a_1, a_2\}$, 两个展示 $\{i_1, i_2\}$, 它们均只有一个槽位且 ctr 恒为 1。$i_1, i_2$ 对 $a_1$ 价值分别为 $v_1^{a_1} = \epsilon + \epsilon^2$,$v_2^{a_1} = 1 - \epsilon$, 对 $a_2$ 价值分别为 $v_1^{a_2} = 1$,$v_2^{a_2} = 0$ 对所有展示和人而言，预算约束为 0，TCPA 约束为 $v_{ic}^a = v_i^a$。

对于 $a_1, a_2$,$\alpha_c^1 = \epsilon$ 和 $\alpha_c^2 = \frac{1}{\epsilon^2}$ 就是局部最优解，在均衡中，两个物品都会被分配给 $a_1$，达到 $1 + \epsilon^2$ 的社会流动性福利。但全局最优是把 $i_1$ 分配给 $a_2$,$i_2$ 分配给 $a_1$，达到 $2 - \epsilon$ 的社会福利。

# 纯策略纳什均衡的存在性

文章最后作者把 impression 和 slot 都放到了一个测度空间中，构造了对偶变量 $\alpha_c$ 到自身的映射，它满足布劳威尔不动点的各个前提条件：

$$\phi(\alpha_c^a) = min\left(\frac{\int_{i,s} ctr_{is}^a v_{is}^a}{\epsilon}, \alpha_c^a(1+\eta)^{-slack_c^a}\right)$$

但是论文中并没有对为什么这样构造和为什么这样构造就可以做出详细描述……(我也没有看懂)