合作博弈基础

2024-2025 学年春夏学期计算经济学讨论班 均衡的计算

金政羽

Clovers2333@gmail.com

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 4 月 4 日

Contents

- Introduction
- Bondareva-Shapley Theorem
- Convex Games and The Weber Set
- Shapley Value in Convex Games
- Nonemptiness and Uniqueness of the Nucleolus

Introduction

在开始之前我们需要掌握以下的内容:

- 合作博弈基本概念
- 合作博弈的核（一般解概念）
- 合作博弈的核仁（最小化不满意度）
- 合作博弈的 Shapley 值（根据边际收益的分配）
- 讨价还价集（解的稳定性）

Bondareva-Shapley Theorem

Balance Condition

一个联盟集合 $\mathcal{D}$ 是平衡集合，如果存在一个正数向量 $(\delta_S)_{S\in\mathcal{D}}$，使得

$$\sum_{\{S\in\mathcal{D}:i\in S\}} \delta_S = 1, \quad \forall i \in N.$$

Theorem 1: Bondareva-Shapley Theorem

合作博弈 $(N; v)$ 的核非空的充要条件是对于每个平衡联盟集合 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 的每个平衡权重向量 $(\delta_S)_{S\in\mathcal{D}}$，满足：

$$v(N) \geq \sum_{S\in\mathcal{D}} \delta_S v(S).$$

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

Bondareva-Shapley 定理可以通过线性规划的对偶定理来证明.

记 $\mathcal{P}(N) = \{S \subseteq N, S \neq \emptyset\}$ 为非空联盟的集合. 记 $\mathcal{P}$ 为弱平衡 $\mathcal{P}(N)$ 的所有权重的集合:

$$\mathcal{P} := \left\{ \delta = (\delta_S)_{S \in \mathcal{P}(N)} : \delta_S \geq 0 \ \forall S \in \mathcal{P}(N), \sum_{S \in \mathcal{P}(N)} \delta_S e^S = e^N \right\}.$$

该集合是 $\mathbb{R}^{2^n - 1}$ 空间中的一个多面体, 且非空: 例如, 它包含向量 δ, 其中对每个 $i \in N$, $\delta_{\{i\}} = 1$, 对于包含至少两个参与者的每个 S, $\delta_S = 0$.

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

Proof Outline

使用线性规划证明以上定理分为如下几个步骤：

- 定义一个线性规划，并证明其可行解集是有界且非空的.
- 通过线性规划的对偶定理，推断出该线性规划的值 Z_P 等于其对偶规划的值 Z_D.
- 证明核非空当且仅当 $Z_D \leq v(N)$.
- 证明 $Z_P \leq v(N)$ 当且仅当上述等式成立.

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

Theorem 2: Bondareva-Shapley, Second Formulation

合作博弈 $(N; v)$ 的核非空的充要条件是:

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{P}(N)} \delta_S v(S), \quad \forall \delta = (\delta_S)_{S \in \mathcal{P}(N)} \in \mathcal{P}.$$

Proof Outline

使用线性规划证明以上定理分为如下几个步骤:

- 定义一个线性规划，并证明其可行解集是有界且非空的.
- 通过线性规划的对偶定理，推断出该线性规划的值 Z_P 等于其对偶规划的值 Z_D.
- 证明核非空当且仅当 $Z_D \leq v(N)$.
- 证明 $Z_P \leq v(N)$ 当且仅当上述等式成立.

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

步骤 1：定义线性规划

考虑以下带有变量 $(\delta_S)_{S\in\mathcal{P}(N)}$ 的线性规划：

$$\begin{aligned}
\text{Compute:} \quad & Z_P := \max \sum_{S\in\mathcal{P}(N)} \delta_S v(S), \\
\text{Subject to:} \quad & \sum_{S:i\in S} \delta_S = 1, \quad \forall i \in N, \\
& \delta_S \geq 0, \quad \forall S \in \mathcal{P}(N).
\end{aligned}$$

该线性规划的可行解集是上面等式中定义的集合 $\mathcal{P}$.

如前所述，该集合是紧且非空的；因此 Z_P 是有限的.

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

步骤 2：对偶问题

对偶问题是以下带有变量 $(x_i)_{i\in N}$ 的问题：

$$\begin{aligned} \text{Compute:} \quad & Z_D := \min x(N), \\ \text{Subject to:} \quad & x(S) \geq v(S), \quad \forall S \in \mathcal{P}(N). \end{aligned}$$

已经证明 Z_P 是有限的，因此线性规划的对偶定理表明 Z_D 也是有限的，且等于 Z_P.

步骤 3：如果核非空，则 $Z_D \leq v(N)$

令 x 为核中的一个向量．则对于每个联盟 S，有 $x(S) \geq v(S)$，因此 x 满足对偶问题的所有约束．目标函数在 x 处的值是 $x(N) = v(N)$；因此 $Z_D \leq v(N)$.

浙江大學 ZHEJIANG UNIVERSITY

The Proof of Bondareva-Shapley Theorem

步骤 4：如果 $Z_D \le v(N)$，则核非空

令 x 为对偶问题的一个可行解，且在该解处达到最小值，即 $x(N) = Z_D$. 由于 x 满足对偶问题的约束，它是联盟理性的. 我们证明 $x(N) = v(N)$. 由于 $Z_D = Z_P$，因此 $x(N) = Z_P \le v(N)$，所以我们推断 $x(N) = v(N)$. 因此 x 在核中，所以核非空.

步骤 5：$Z_D \le v(N)$ 当且仅当定理条件成立

$Z_P \le v(N)$ 当且仅当对于每个可行解 $\delta = (\delta_S)_{S \in \mathcal{P}(N)}$，都有 $\sum_{S \in \mathcal{P}(N)} \delta_S v(S) \le v(N)$，即当且仅当定理中的条件成立. $\square$

Convex Games and The Weber Set

Theorem 3: Convex Games Marginal Allocation

设 $(N; v)$ 是一个凸合作博弈，并且 x 是分配向量：

$$\begin{aligned} x_1 &= v(1), \\ x_2 &= v(1,2) - v(1) \\ &\dots \\ x_n &= v(1,2,\dots,n) - v(1,2,\dots,n-1). \end{aligned}$$

则向量 x 在博弈 $(N; v)$ 的核中.

Convex Games and The Weber Set

证明.

首先，证明 $x(N) = v(N)$：

$$\sum_{i \in N} x_i = v(1) + (v(1,2) - v(1)) + (v(1,2,3) - v(1,2)) + \cdots$$
$$+ (v(1,2,\ldots,n) - v(1,2,\ldots,n-1))$$
$$= v(1,2,\ldots,n) = v(N).$$

接下来证明对于每个联盟 $S \subseteq N$，有 $x(S) \geq v(S)$． 设 $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ 是一个联盟，且假设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$． 则对于每个 $j \in \{1,2,\ldots,k\}$，有 $\{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}\} \subseteq \{1,2,\ldots,i_j - 1\}$．

根据凸合作博弈的性质，有

$$v(1,2,\ldots,i_j) - v(1,2,\ldots,i_j - 1) \geq v(i_1, i_2, \ldots, i_j) - v(i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}).$$

Convex Games and The Weber Set

证明.（续）

因此

$$
\begin{aligned}
x(S) &= \sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \\
&= (v(1,2,\ldots,i_1) - v(1,2,\ldots,i_1-1)) + (v(1,2,\ldots,i_2) \\
&\quad - v(1,2,\ldots,i_2-1)) + \cdots + (v(1,2,\ldots,i_k) - v(1,2,\ldots,i_k-1)) \\
&\geq (v(i_1) - v(\emptyset)) + (v(i_1,i_2) - v(i_1)) + \cdots + (v(i_1,i_2,\ldots,i_k) \\
&\quad - v(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})) \\
&= v(i_1,i_2,\ldots,i_k) = v(S),
\end{aligned}
$$

□

Convex Games and The Weber Set

Remark

我们已经证明，给定参与者的任意排序 $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$，以下向量是博弈 $(N; v)$ 核中的一个分配：

$$w^\pi := (v(i_1), v(i_1, i_2) - v(i_1), v(i_1, i_2, i_3) - v(i_1, i_2), \ldots, v(N) - v(N \setminus \{i_n\})).$$

Definition (Weber Set)

分配集合 $\{w^\pi : \pi \text{ is a permutation of } N\}$ 的凸包被称为合作博弈 $(N; v)$ 的 **Weber 集**.

我们有韦伯集属于凸合作博弈的核，接下来我们将要证明，凸合作博弈的核也属于韦伯集，即在凸合作博弈的情况下，核与韦伯集是相等的.

Convex Games and The Weber Set

证明.

我们采用反证法．假设存在一个核分配 x 不属于 Weber 集 $W(v)$．根据分离平面定理，由于 $W(v)$ 的凸性和闭性，存在一个向量 $y \in \mathbb{R}^N$，使得对于每个 $z \in W(v)$，都有：

$$z \cdot y > x \cdot y$$

特别地，对于每个排列 π：

$$w^{\pi} \cdot y > x \cdot y \quad \text{对每个排列 } \pi$$

Convex Games and The Weber Set

证明.（续）

设排列 π 满足 $y_{\pi(1)} \geq y_{\pi(2)} \geq \ldots \geq y_{\pi(n)}$. 那么：

$$w^\pi \cdot y = \sum_{i=1}^{n} y_{\pi(i)}\big(v(\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(i)\}) - v(\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(i-1)\})\big)$$

$$= y_{\pi(n)}v(N) + y_{\pi(1)}v(\emptyset) + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{\pi(i)} - y_{\pi(i+1)})v(\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(i)\})$$

由于 $v(\emptyset) = 0$ 且 $y_{\pi(i)} - y_{\pi(i+1)} \geq 0$，并且，对于所有联盟 S，$x \in C(v)$ 意味着 $x(S) \geq v(S)$，因此我们有：

$$w^\pi \cdot y \leq y_{\pi(n)}v(N) + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{\pi(i)} - y_{\pi(i+1)})\sum_{j=1}^{i} x_{\pi(j)}$$

Convex Games and The Weber Set

证明.（续）

通过代数运算，可以进一步推导:

$$w^\pi \cdot y \leq \sum_{i=1}^{n} y_{\pi(i)} \sum_{j=1}^{i} x_{\pi(j)} - \sum_{i=2}^{n} y_{\pi(i)} \sum_{j=1}^{i-1} x_{\pi(j)} = \sum_{i=1}^{n} y_{\pi(i)} x_{\pi(i)}$$

即 $w^\pi \cdot y \leq x \cdot y$，这与之前的不等式 $w^\pi \cdot y > x \cdot y$ 矛盾.

因此，我们可以得出结论：核是 Weber 集的元素. □

Shapley Value in Convex Games

Theorem 4: Shapley Value in Convex Games

如果 $(N; v)$ 是一个凸合作博弈，那么 Shapley 值在博弈的核中.

证明.

对于每个排列 $\pi \in \Pi(N)$，记 w^π 为 $\mathbb{R}^N$ 中的向量，使得对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，其第 i 个坐标为

$$w_i^\pi = v(P_i(\pi) \cap \{i\}) - v(P_i(\pi)).$$

根据之前的定理，对于每个 $\pi \in \Pi(N)$，w^π 在博弈 $(N; v)$ 的核中. 而 Shapley 值是所有这些向量 $(w^\pi)_{\pi \in \Pi(N)}$ 的平均值:

$$\mathrm{Sh}(N; v) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} w^\pi.$$

由于核是一个凸集，可以得出结论: Shapley 值在核中 (加权重心). $\square$

Nonemptiness and Uniqueness of the Nucleolus

设 (N,v) 是一个具有 n 个参与者的合作博弈．给定一个分配方案 $x \in R^n$，我们定义 $e(S,x) = v(S) - x(S)$，其中 $S \subseteq N$．这个数称为分配方案 x 下联盟 S 的超额值，可以解释为联盟 S 对分配方案 x 的不满意度的度量．

因此，我们得到核 $C(v)$ 是所有超额值均为非负的分配方案的集合．对于一个分配方案 $x \in R^n$，令 $\theta(x)$ 表示 $(2^n - 2)$ 维向量，其分量是按非递增顺序排列的非平凡超额值 $e(S,x)$，其中 $\emptyset \neq S \neq N$．即 $\theta_i(x) \geq \theta_j(x)$，对于 $1 \leq i < j \leq 2^n - 2$．用 $\preceq_l$ 表示向量之间的”字典序小于”关系．

定义 (Nucleolus)

博弈 (N,v) 的核仁 $\eta(v)$ 是在所有分配方案 $x \in I(v)$ 中字典序最大化 $\theta(x)$ 的分配方案集合．即，

$$\eta(v) = \{x \in I(v) : \theta(x) \preceq_l \theta(y) \text{ for all } y \in I(v)\}.$$

Nonemptiness and Uniqueness of the Nucleolus

记 $\theta_k(x)$ 表示在分配方案 x 下的第 k 大的超额值，我们有如下定理：

Theorem 5: Characterization of θ_k

对于每个 k，$1 \leq k \leq 2^n$，

$$\theta_k(x) = \max_{S_1,\ldots,S_k \subseteq N, S_i \neq S_j \text{ for } i \neq j} \min\{e(S_1,x),\ldots,e(S_k,x)\}.$$

特别地，当 $k=1$ 时，上式简化为：

$$\theta_1(x) = \max_{S \subseteq N} e(S,x),$$

Nonemptiness and Uniqueness of the Nucleolus

Corollary 1: Continuity of θ_k

对于每个 $k = 1, 2, \ldots, 2^n$，函数 θ_k 是连续的．

证明.

对于每个联盟 $S \subseteq N$，函数 $e(S, x) = v(S) - x(S)$ 在 x 上是线性的，因此特别地它是连续函数．由于有限个连续函数的最小值是连续函数，我们可以推断函数 $x \mapsto \min\{e(S_1, x), \ldots, e(S_k, x)\}$ 对于每个 k 个联盟的集合 $\{S_1, \ldots, S_k\}$ 是连续的．又由于有限个连续函数的最大值也是连续函数，根据定义式，θ_k 是连续函数． $\square$

Nonemptiness and Uniqueness of the Nucleolus

Theorem 6: Nonemptiness of the Nucleolus

对于每个合作博弈 $(N; v)$ 和任意非空紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^N$，博弈 $(N; v)$ 相对于 K 的核仁是非空紧集．

证明.

由于 θ_1 是连续函数，集合

$$X_1 := \left\{ x \in K : \theta_1(x) = \min_{y \in K} \theta_1(y) \right\}$$

是紧且非空的．对于 $2 \leq k \leq 2^n$，递归定义

$$X_k := \left\{ x \in X_{k-1} : \theta_k(x) = \min_{y \in X_{k-1}} \theta_k(y) \right\}.$$

假设集合 X_{k-1} 紧且非空，由于 θ_k 是连续函数，根据归纳假设，我们推断集合 X_k 也是紧且非空的．最后注意到 X_{2^n} 就是博弈的核仁． $\square$

Properties of the Nucleolus

Theorem 7: Uniqueness of the Nucleolus for Convex Sets

设 $(N; v)$ 是一个合作博弈，设 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个凸集．则 $\mathcal{N}(N; v; K)$ 最多包含一个点．

证明.

设 x 和 y 是核仁中的两个点．我们将证明 $x = y$．记

$$\theta(x) = (e(S_1, x), e(S_2, x), \ldots, e(S_{2^n}, x)),$$
$$\theta(y) = (e(R_1, y), e(R_2, y), \ldots, e(R_{2^n}, y)),$$

以及

$$\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right), e\left(T_2, \frac{x+y}{2}\right), \ldots, e\left(T_{2^n}, \frac{x+y}{2}\right)\right).$$

Properties of the Nucleolus

证明.（续）

由于 x 和 y 都在核仁中，根据定义，$\theta(x) \preceq_L \theta(y)$，因此 $\theta(x) = \theta(y)$，即

$$\theta_k(x) = \theta_k(y), \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

由于 K 是凸集，$\frac{x+y}{2}$ 也在 K 中．对于每个联盟 $T \subseteq N$，有

$$\begin{aligned} 2e\left(T, \frac{x+y}{2}\right) &= 2v(T) - (x+y)(T) \\ &= v(T) - x(T) + v(T) - y(T) \\ &= e(T, x) + e(T, y), \end{aligned}$$

因此

$$2\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) = (e(T_1, x) + e(T_1, y), e(T_2, x) + e(T_2, y), \ldots, e(T_{2^n}, x) + e(T_{2^n}, y)).$$

Properties of the Nucleolus

证明.（续）

由于 S_1 在 x 处最大化超额值，我们可以推断

$$e(T_1, x) \leq e(S_1, x),$$

而由于 R_1 在 y 处最大化超额值，

$$e(T_1, y) \leq e(R_1, y).$$

由于 $e(S_1, x) = e(R_1, y)$（根据前面的等式），结合上述不等式，我们得到

$$e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right) = \frac{e(T_1, x) + e(T_1, y)}{2} \leq \frac{e(S_1, x) + e(R_1, y)}{2} = e(S_1, x).$$

Properties of the Nucleolus

证明.（续）

如果 $e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right) < e(S_1, x)$，那么 $\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) <_L \theta(x)$，与 x 在核仁中的假设矛盾．因此，必须有 $e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right) = e(S_1, x)$，从而

$$e(T_1, x) + e(T_1, y) = e(S_1, x) + e(R_1, y).$$

利用不等式 $e(T_1, x) \leq e(S_1, x)$ 和 $e(T_1, y) \leq e(R_1, y)$，我们得到：

$$e(T_1, x) = e(S_1, x) \text{ 且} e(T_1, y) = e(R_1, y).$$

这意味着 T_1 同时最大化在 x 和 y 处的超额值．即通过更改联盟的顺序，我们可以写成

$$\theta(x) = (e(T_1, x), e(S_2', x), \ldots, e(S_{2^n}', x)),$$
$$\theta(y) = (e(T_1, y), e(R_2', y), \ldots, e(R_{2^n}', y)),$$

Properties of the Nucleolus

证明.（续）

其中 $T_1, S'_2, \ldots, S'_{2^n}$ 是通过将 S_1 替换为 T_1 得到的，类似地，$T_1, R'_2, \ldots, R'_{2^n}$ 是通过将 R_1 替换为 T_1 得到的.

继续归纳，对于每个 k 满足 $1 \leq k \leq 2^n$，我们可以证明 $e(T_k, x) = e(S_k, x)$ 且 $e(T_k, y) = e(R_k, y)$. 换句话说，

$$e(T, x) = e(T, y), \quad \forall T \subseteq N.$$

特别地，对 $T = \{i\}$，我们推断对于每个参与者 $i \in N$，

$$v(i) - x_i = e(\{i\}, x) = e(\{i\}, y) = v(i) - y_i,$$

因此 $x_i = y_i$. 这表明 $x = y$，即我们需要证明的结论. □

References

- Game Theory (Michael Maschler, Shmuel Zamir, Eilon Solan).
- A Short Proof of the Inclusion of the Core in the Weber Set, J.J.M. Derks, 1992.