合作博弈的计算复杂性

2024-2025 学年春夏学期计算经济学讨论班 均衡的计算

金政羽

Clovers2333@gmail.com

浙江大学计算机科学与技术学院

2025 年 **4** 月 **4** 日

Contents

Introduction

我们将合作博弈的解概念抽象为一个"公平集合" $\mathcal{F}$，我们主要关心以下复杂度问题：

- 给定一个分配向量，判断它是否在 $\mathcal{F}$ 中；
- 给定一个合作博弈，判断 $\mathcal{F}$ 是否非空；
- $\mathcal{F}$ 是否存在.

Introduction

考虑到合作博弈的输入本身就是指数级的，因此我们在接下来的讨论中都将基于以下图问题：

图博弈问题

我们给定一个无向图 $G=(N,E)$，其中每条边 $\{i,j\}$ 有一个整数权重 $v(i,j)$. 对于每个联盟 S，$v(S)$ 定义为 $\sum_{\{i,j\}\subseteq S} v(i,j)$. 也就是说，一个由节点组成的联盟可以保证其成员获得由该联盟诱导的子图的总权重.

我们将这个由加权图 G 定义的博弈记为 v_G. 这个问题事实上可以看作是在 n 个城市之间公平分配公路网络收入的问题.

值得指出的是，当边权非负时，函数 v 是凸的.

The Shapley Value

定理 (Theorem 1)

图博弈 v_G 的 *Shapley* 值为 $\phi(i) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} v(i,j)$.

证明.

考虑边 (i,j) 及其权重 $v(i,j)$ 对 $\phi(i)$ 的贡献．对于每个包含 i,j 的子集 S，这条边贡献了

$$\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}v(i,j).$$

有 $\binom{n-2}{k-2}$ 个大小为 k 且同时包含 i 和 j 的子集 S．所有大小为 k 且包含 i,j 的子集 S 总共贡献了

$$\binom{n-2}{k-2}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}v(i,j),$$

The Shapley Value and Negative Cuts

证明. (续)

即

$$\frac{k-1}{n(n-1)}v(i,j).$$

对 $k=2,3,\ldots,n$ 求和，我们得到 $\phi(i)=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}v(i,j)$. □

我们将函数 $e(S,x)=v(S)-x(S)$ 定义为联盟 S 在分配 x 下的超额值. 因此，一个分配在核心中当且仅当对于任意联盟 S 其超额值都是非正的. 然而，容易看出在 Shapley 值下，联盟 S 的超额值 $e(S,\phi)$ 是连接 S 中顶点与 $N-S$ 中顶点的边的总权重的 $-\frac{1}{2}$ 倍；这正是割集 $(S,N-S)$ 权重的一半. 因此我们有:

引理 (Lemma 1)

Shapley 值在博弈 v_G 的核心中当且仅当图 G 中不存在负割集. □

Nonemptiness of the Core and Negative Cuts

事实上，我们可以证明 Shapley 值是核心中最有可能的成员：

引理 (Lemma 2)

博弈 v_G 的核心非空当且仅当图 G 中不存在负割集.

证明.

证明前半部分由引理 1 可得.

反之，假设我们有一个负割集，即对于某个 N 的子集 S，$v(S, N-S) = \sum_{i \in S, j \in N-S} v(i,j) < 0$. 因此，

$$\phi(S) - v(S) = \phi(N-S) - v(N-S) = v(S, N-S)/2 < 0.$$

对于任意分配 x，我们有

$$x(N) = x(S) + x(N-S) = v(N) = \phi(N) = \phi(S) + \phi(N-S).$$

Nonemptiness of the Core and Negative Cuts

证明. (续)

所以,

$$\begin{aligned} x(S)-v(S)+x(N-S)-v(N-S) &= \phi(S)-v(S)+\phi(N-S)-v(N-S) \\ &= v(S,N-S) < 0. \end{aligned}$$

因此，要么 $x(S)-v(S)<0$ 要么 $x(N-S)-v(N-S)<0$．结果，x 不可能在核心中，且核心为空． □

The Complexity of MAX-CUT

为了理解核心相关问题的计算复杂度，我们需要以下这个简单但重要的复杂度结果：

引理 (Lemma 3)

判断一个图是否有负割集是 *NP* 完全的 .

证明.

显然该问题在 NP 中．为了证明它是 NP-hard，我们将以下已知的 NP 完全问题归约到负割集问题：

MAX-CUT：给定一个图 $G=(V,E)$，其每条边 (i,j) 有一个非负权重 $c(i,j)$，以及一个整数 $K>0$，问是否存在一个割集，其总权重 $>K$?

The Complexity of MAX-CUT

证明. (续)

假设我们有这样一个图 G，边权函数 c 和整数 K. 令 $c(E)=\sum_{(i,j)\in E}c(i,j)$，并定义 $c'(i,j)=-c(i,j)$. 我们向图中添加两个新节点 0 和 $n+1$，并令 $c'(k,i)=c(E)$，其中 $k\in\{0,n+1\}$ 且 $i=1,2,\ldots,n$. 最后，令 $c'(0,n+1)=K-nc(E)$.

在新图 G' 上使用权重函数 c'，任何不将 0 与 $n+1$ 分开的割集都将有非负权重，因为割集中至少会有一条权重为 $c(E)$ 的边，而割集中负边的总和不少于 $-c(E)$. 因此，负割集一定会将 0 与 $n+1$ 分开，并且会切割恰好 n 条权重为 $c(E)$ 的边.

所以，这个假设存在的负割集中剩余的边在原图中诱导出一个总权重 $>K$ 的割集. 因此，图 G' 中存在一个负割集当且仅当原图中存在一个权重至少为 K 的割集. □

The Complexity of the Core

定理 (Theorem 2)

以下问题都是 *NP* 完全的：

1. 给定 v_G 和分配 x，判断 x 是否不在 v_G 的核心中？
2. 给定 v_G，判断 v_G 的 *Shapley* 值是否不在其核心中？
3. 给定 v_G，判断 v_G 的核心是否为空？

证明.

从引理 1、2 和 3，我们知道上述问题都是 NP-hard 的．为了证明它们在 NP 中，我们注意到如果 x 不在 v_G 的核心中，那么存在一个子集 S 使得 $x(S) < v_G(S)$，这可以在多项式时间内验证． □

相比之下，如果图中没有负边权（即博弈是凸的），我们可以证明以下事实：

A Polynomial-Time Algorithm in Special Cases

引理 (Lemma 4)

当图 G 的所有权重都是非负的，我们可以在多项式时间内测试一个分配 x 是否在 v_G 的核心中.

证明.

我们将问题归约为网络流问题.

给定 $G=(N,E)$ 和边上的权重 v，我们构造一个流网络 G'. G' 的节点集为 $N' = N \cup E \cup \{0, n+1\}$，其中 0 是源点，$n+1$ 是汇点.

新图中的有向弧定义如下：对于 E 中的每条边 $\{i,j\}$，我们添加弧 $(\{i,j\},i)$、$(\{i,j\},j)$ 和 $(0,\{i,j\})$，其容量分别为 $c(\{i,j\},i) = c(\{i,j\},j) = \infty$ 和 $c(0,\{i,j\}) = v(i,j)$. 对于每个节点 $i \in N$，我们构造一条弧 $(i,n+1)$，权重为 $c(i,n+1) = x(i)$.

A Polynomial-Time Algorithm in Special Cases

证明. (续)

我们将证明 G' 中从 0 到 $n+1$ 的最大流的值是 $v(N) = x(N)$ 当且仅当 x 在核心中．首先，假设存在这样的流．所有到 $n+1$ 的弧和所有从 0 出发的弧都被填满到容量．因此对于 N 的任何子集 S，通过 G 中对应节点的流至少为 $x(S)$．然而，这些流必须通过对应的边，因此
$x(S) \geq v(S)$；x 在核心中．

反过来，假设我们有一个容量为 $c(S', N' - S') < v(N)$ 的割集．显然，该割集不能包含任何容量为 ∞ 的弧．令 $S = N \cap S'$．则
$c(S', N' - S') = x(S) + v(N) - v(S) < v(N)$．因此 $x(S) < v(S)$，且 x 不在核心中． $\square$

A Polynomial-Time Algorithm in Special Cases

定理 (Theorem 3)

定理 2 中的问题 *(1)*、*(2)* 和 *(3)* 在图 G 没有负边的情况下可以在多项式时间内解决. □

ϵ-核是另一个解概念，它实际上是核心的一种松弛．超额值不要求非正，而是要求小于一个数 $\epsilon > 0$．因此，ϵ-核包含所有满足 $x(S) \geq v(S) - \epsilon$ 对所有 $S \subseteq N$ 成立的分配 x.

我们将在定理 6 中证明，图 G 的 Shapley 值最小化了最大超额值，由此可知，对于任意数字 ϵ，Shapley 值在 v_G 的 ϵ-核中当且仅当 v_G 的 ϵ-核非空．由于判断是否存在权重大于 K 的割集是 NP 完全问题，我们有:

The Complexity of the ϵ-Core

定理 (Theorem 4)

给定图 G 和 $\epsilon > 0$，判断任意给定分配（特别是 *Shapley* 值）是否不在 v_G 的 ϵ-核中是 *NP* 完全的．给定图 G，计算使 ϵ-核非空的最小 ϵ 值也是 *NP* 完全的． $\square$

同样的结果也适用于弱 ϵ-核，即所有满足 $x(S) \geq v(S) - \epsilon|S|$ 对所有 $S \subseteq N$ 成立的分配 x 的集合．

The Kernel and the Nucleolus

博弈的 Kernel 包含所有满足以下条件的分配 x：对任意两个玩家 i,j，

$$\max_{i\in S, j\notin S} e(S,x) = \max_{j\in S, i\notin S} e(S,x).$$

v_G 的 Kernel 具有良好的计算特性：v_G 的 Kernel 的非空问题是平凡的，当所有值都是非负时，成员资格问题也很容易解决.

定理 (Theorem 5)

Shapley 值总是在 v_G 的 Kernel 中.

容易证明的是，核仁在 Kernel 中：如果存在 S_1 使得 $i \in S_1$ 且 $j \notin S_1$，S_2 使得 $j \in S_2$ 且 $i \notin S_2$，且 $e(S_1,x) < e(S_2,x)$，那么可以让 $x(i)$ 分给 $x(j)$ 一些，使得字典序变小.

所以我们只需要证明 Shapley 值在核仁中即可，这将是定理 6 的内容.

The Nucleolus and the Shapley Value

对于一个分配 x，定义 $e_1(S) = v(S) - x(S)$．现在按照 e_1 对 N 的子集排序：$e_1(S_1) \geq e_1(S_2) \geq \cdots \geq e_1(S_m)$，其中 $m = 2^n$．核仁是在词典序上最小化向量 $(e_1(S_1), e_1(S_2), \ldots, e_1(S_m))$ 的分配．计算核仁的复杂度在一般博弈中是一个 Open Problem．然而，在图的特殊情况下，这个问题得到了极大的简化：

定理 (Theorem 6)

v_G 的 *Shapley* 值与核仁相同．

The Nucleolus and the Shapley Value

证明.

令 x 为核仁；定义 $e_2(S) = v(S) - \phi(S)$，并假设我们按以下方式对 N 的子集排序：$e_2(T_1) \geq e_2(T_2) \geq \cdots \geq e_2(T_m)$．令：

$$\alpha_1 = (e_1(S_1), e_1(S_2), \ldots, e_1(S_m)), \alpha_2 = (e_2(T_1), e_2(T_2), \ldots, e_2(T_m))$$

由于 x 是核仁，α_1 在词典序上小于或等于 α_2．

又由于 Shapley 值的超额值等于所有出边的总权重，因此 $e_2(S) = e_2(N - S)$．故我们可以安排 T_i 的排序，使得 $T_{2i-1} = N - T_{2i}$．

那么我们有 $e_2(T_{2i-1}) = e_2(T_{2i})$，对每个 $i = 1, 2, \ldots, m/2$；我们可以假设 $e_1(T_{2i-1}) \geq e_1(T_{2i})$，且不失一般性．

我们声称对每个 $i = 1, 2, \ldots, m/2$，有：

$$e_1(S_{2i-1}) = e_1(S_{2i}) = e_1(T_{2i-1}) = e_1(T_{2i}) = e_2(T_{2i-1}) = e_2(T_{2i}). \quad (1)$$

The Nucleolus and the Shapley Value

证明. (续)

证明使用归纳. 当 $i = 1$ 时，我们声称:

$$e_1(T_1) \leq e_1(S_1) \leq e_2(T_1) = e_2(T_2) \leq e_1(T_2) \leq e_1(S_2) \leq e_1(S_1).$$

其中:

- 第一个不等式来自 S 按降序排列的事实;
- 第二个不等式来自 x 是核仁的事实;
- 第三个等式来自 Shapley 值超额值的对称性;
- 第四个不等式来自观察到 $e_1(T_1) + e_1(T_2) = e_2(T_1) + e_2(T_2) = v(T_1) + v(T_2) - v(N)$ 及先前的不等式;
- 第五个不等式来自 S 按降序排列且 $e_1(T_1) \geq e_1(T_2)$ 的事实;
- 最后一个不等式来自 S 按降序排列的事实.

The Nucleolus and the Shapley Value

证明. (续)

比较各项，我们注意到除了第一项外的所有项必须相等，由于 $e_1(T_1) + e_1(T_2) = e_2(T_1) + e_2(T_2)$，第一项也必须与其他项相等.

以上，我们完成了 $i = 1$ 的证明，接下来进行归纳.

假设对所有 $i < k$，等式 (1) 成立.

1. 因为 x 是核仁，且根据归纳假设前 $2k - 2$ 个元素 α_1 和 α_2 相同，故：$e_1(S_{2k-1}) \leq e_2(T_{2k-1})$.
2. 由归纳假设，我们有：$e_1(T_i) = e_1(S_i)$，$i = 1, 2, \ldots, 2k - 2$.
3. 又因为 α_1 是将 S 降序排列，所以：$e_1(T_{2k-j}) \leq e_1(S_{2k-1})$，$j = 0, 1$.
4. $e_2(T_{2k}) = e_2(T_{2k-1})$.

综上，我们得到 $e_1(T_{2k-j}) \leq e_1(S_{2k-1}) \leq e_2(T_{2k-j})$，$j = 0, 1$.

The Nucleolus and the Shapley Value

证明. (续)

通过对 $j = 0, 1$ 两个不等式的两边求和，两边都等于 $v(T_{2k-1}) + v(T_{2k}) - v(N)$，这要求原始两个不等式中的等号成立.

因此，$e_1(T_{2k-j}) = e_1(S_{2k-1}) = e_2(T_{2k-j})$，$j = 0, 1$.

由于 $e_1(S_{2k-1}) \geq e_1(S_{2k}) \geq \min[e_1(T_{2k-1}), e_1(T_{2k-2})]$，等式 (1) 对 $i = k$ 也成立.

因此，等式 (1) 对所有 $i = 1, 2, \ldots, m/2$ 都成立，即 $e_1(T) = e_2(T)$ 对每个 N 的子集 T 都成立. 特别地，令 $T = \{j\}$ 对 $j \in N$，那么 $v(j) - x(j) = v(j) - \phi(j)$. 因此 $x(j) = \phi(j)$ 对每个 $j \in N$ 成立. □

这个定理表明，对于图博弈，Shapley 值不仅是核心中最可能的成员，它还是核的成员，并且是唯一的核仁.

The Bargaining Set

讨价还价集是满足以下条件的所有分配 x 的集合：对于所有玩家 i 和 j，如果存在一个分配 y 和一个包含 i 但不包含 j 的联盟 S，且满足：

(a) $y(S) \leq v(S)$，以及

(b) $x_k < y_k$ 对所有 $k \in S$ 成立，

那么存在另一个分配 z 和一个包含 j 但不包含 i 的集合 T，使得：

(a) $z(T) \leq v(T)$，

(b) $z_k \geq y_k$ 对所有 $k \in T \cap S$ 成立，以及

(c) $z_k \geq x_k$ 对所有 $k \in T - S$ 成立.

直观上，这意味着当玩家 i 使用参数 y 和 S 反对 x 时，玩家 j 可以使用参数 z 和 T 进行回应.

The Complexity of the Bargaining Set

定理 (Theorem 7)

判断一个分配是否在 v_G 的讨价还价集中是 *NP-hard* 的.

证明.

我们通过从负割集问题归约到讨价还价集问题来证明该问题是 NP-hard 的. 假设我们有一个图 $G=(V,E)$ 和一个权重函数 $v: E \to \mathbb{R}$. 回顾 Shapley 值不在核心中当且仅当存在负割集.

考虑 v_G 的 Shapley 值，构造一个新图 H，方法是向 G 添加一个新节点 u^0，并给 u^0 与所有旧节点之间的新边赋权重 $w(|E|)$，其中 $w(|E|)=\sum_{e\in E}|v(e)|$.

定义 v_H 的一个分配 x_0，方法是将 v_G 的 Shapley 值赋给 G 的节点，并将所有新边权重的总和赋给 u^0. 每个割集 C 应至少包含一条与 u^0 相连的边，且这条边具有权重 $w(|E|)$.

The Complexity of the Bargaining Set

证明. (续)

由于每条与 u^0 相连的边具有权重 $w(|E|)$，且割集 C 中所有其他边的总权重至少为 $-w(|E|)$，因此 H 没有负割集.

我们声称 x_0 在 v_H 的核心中当且仅当 G 没有负割集.

对于"if" 部分，假设 G 没有负割集，让 S 是 H 的顶点的子集．如果 $u^0 \notin S$，则 $x_0(S) = \phi_G(S)$ 且 $v_H(S) = v_G(S)$．因为 ϕ_G 是 v_G 的 Shapley 值，当 G 没有负割集时，我们知道 $x_0(S) = \phi_G(S) \geq v_G(S) = v_H(S)$．如果 $u^0 \in S$，则 $x_0(S - \{u^0\}) \geq v_H(S - \{u^0\})$.

此外，$x_0(u^0) = |V| \cdot w(|E|) \geq |S - \{u^0\}| \cdot w(|E|) = v_H(S - \{u^0\}, u^0)$．将这两个不等式相加，我们得到 $x_0(S) \geq v_H(S)$．因此，x_0 在 H 的核心中.

The Complexity of the Bargaining Set

证明. (续)

对于”only if” 部分，假设 G 有一个负割集．那么，必然存在 V 的子集 S，使得 $\phi_G(S) < v_G(S)$，因为 G 的核心在这种情况下为空．因此，$x_0(S) = \phi_G(S) < v_G(S) = v_H(S)$，$x_0$ 不在 H 的核心中．(证明结束)

令 $H = (V', E')$ 并利用上述推论，我们进一步构造一个新图 D．我们添加一个新节点 u^1 和新边 $\{(i, u^1) : i \in V'\}$．新边的权重定义为 $\phi_H(i) - x_0(i)$，其中 $\phi_H(i)$ 是图 H 上的 Shapley 值．

定义一个新分配 y_0，方法是将 H 的 Shapley 值赋给 H 中的节点，并将 0 赋给新节点 u^1．我们声称 y_0 在 D 的讨价还价集中当且仅当 x_0 在 H 的核心中．

The Complexity of the Bargaining Set

证明. (续)

如果 x_0 不在 H 的核心中，则 G 有一个负割集．因此，存在 V 的子集 S 使得 $\phi_G(S) < v_G(S)$．考虑 D 中的子集 $S' = S \cup \{u^1\}$：$y_0(S') = \phi_H(S)$ 且 $v_D(S') = \phi_H(S) - x_0(S) + v_H(S)$．

因此，$y_0(S') - v_D(S') = \phi_H(S) - (\phi_H(S) - x_0(S) + v_H(S)) = x_0(S) - v_H(S)$．由于 $S \subset V$，$x_0(S) = \phi_G(S)$ 且 $v_H(S) = v_G(S)$，我们有：

$$y_0(S') - v_D(S') = \phi_G(S) - v_G(S) < 0.$$

然而，对于任何不包含 u^1 的子集 $T \subset V'$，$y_0(T) = \phi_H(T)$ 且 $v_D(T) = v_H(T)$．由于 H 的 Shapley 值是 H 的核，所以：

$$y_0(T) - v_D(T) = \mathrm{cut}(H, \overline{H}) \geq 0.$$

The Complexity of the Bargaining Set

证明. (续)

因此，在讨价还价集的定义中，令 $i = u^1$ 且 $j \in S$，那么 i 可以以子集 S' 和任意足够小的 $\epsilon > 0$ 的分配 y_1 反对 y_0，其中 $y_1(i) = y_0(i) + \epsilon$．玩家 j 无法用不包含 u^1 的子集 T 回应．因此，y_0 不在讨价还价集中．

反过来，如果 x_0 在 H 的核心中，则 G 没有负割集．对于所有包含 u^1 的子集 S'，我们有

$$y_0(S') - v_D(S') = x_0(S) - v_H(S) = \phi_G(S) - v_G(S) \geq 0.$$

此外，和前面一样，对于所有包含 u^1 的 T，我们有：

$$y_0(T) - v_D(T) = \phi_H(T) - v_H(T) = \mathrm{cut}(H, \overline{H}) \geq 0.$$

因此 y_0 在 D 的核心中，从而在 D 的讨价还价集中．

综合上述两个声明，我们得出结论：y_0 不在 D 的讨价还价集中当且仅当 G 有一个负割集．因此，判断一个分配是否在讨价还价集中是 NP-hard 的． $\square$

The von Neumann-Morgenstern Solution

在合作博弈的经典著作中，冯 · 诺依曼和摩根斯特恩定义了（历史上最早的）解概念. 假设 x 和 y 是两个分配，如果存在一个联盟 S 使得 (a) $x(S) \leq v(S)$，且 (b) $x_i > y_i$（对所有 $i \in S$ 成立），则我们称 x 支配 y.

我们称一个分配集 $\mathcal{F}$ 是一个解，如果：

(1) $\mathcal{F}$ 中没有两个分配互相支配，且

(2) 任何不在 $\mathcal{F}$ 中的分配都被 $\mathcal{F}$ 中的某个分配所支配.

这个解概念在早期失去了流行度，因为有人证明了（Lucas）存在没有解的博弈.

The von Neumann-Morgenstern Solution

当博弈是凸的（在之前所说的图博弈中，即当边权都是正数时），Core 就是一个解．然而，一般情况下，人们必须依靠冯・诺依曼-摩根斯特恩解的定义来确定一个博弈 v_G 是否有解．我们接下来想要知道，是否存在一个算法（无论多慢），可以判定博弈是否有冯・诺依曼-摩根斯特恩解．

然而，Göbel 在 1931 年就证明了，判断一个博弈是否具有冯・诺依曼-摩根斯特恩解甚至不是 NP 完全的问题，而是一个完全不可判定的问题，这在计算复杂度中是一个更强的负面结果．

Hypergraph Games

我们将图问题的" 边" 进行推广，一条" 边" 不再是连接两个点，而是连接 k 个点，我们称这个扩展游戏为超图博弈，因为 k 是固定的，所以我们最多有 $\binom{N}{k}$ 条边，边数仍为多项式，问题仍具有讨论意义.

在这种情况下，我们可以将 v 视为基于加权超图 $H = (N, E)$ 给出的，其中超边大小为 k.

在这种推广中，Shapley 值仍然可以很容易地计算为:

$$\phi(i) = \frac{1}{k} \sum_{i \in e \in E} v(e).$$

Shapley 值在集合 S 上的超额值是 S 中恰好有 i 个节点的超边权重总和的 $\frac{1}{k}$ 倍，对 $i = 1, \ldots, k$ 求和.

Complexity Results for Hypergraph Games

可以通过相似方法，证明判断 Shapley 值是否在核心中（即，超图中是否存在具有负和的集合 S）是 NP 完全的（具体来说，只需在之前的基础上更改割的定义即可）.

并且，当所有权重都是非负时，引理 4 的 MAX-FLOW 技术仍然适用：接下来将展示如何在多项式时间内判断给定分配 x 是否在核心中.

Construction

对于给定的超图 $H = (N, E)$ 和分配 x，我们构造一个流网络 H'，其节点集为 $N' = N \cup E \cup \{0, n+1\}$，其中 0 是源点，$n+1$ 是汇点．新图中的有向弧定义如下：对于每个超边 $e \in E$，我们添加弧 (e, i) 对所有 $i \in e$ 成立，以及 $(0, e)$，其容量分别为 $c(e, i) = \infty$ 和 $c(0, e) = v(e)$．对于每个节点 $i \in N$，我们构造一条弧 $(i, n+1)$，权重为 $c(i, n+1) = x(i)$.

Main Theorem for Hypergraph Games

定理 (Theorem 8)

定理 2 中的问题 *(1)*、*(2)* 和 *(3)* 在超图的情况下是 *NP* 完全的，而对于没有负边的超图，这些问题可以在多项式时间内解决. □

这个结果表明，即使我们将模型推广到超图情况，关于核心的复杂度结果依然保持不变：在一般情况下是 NP 完全的，而在没有负边的情况下是多项式时间可解的.

超图模型可以更好地描述需要多方合作的情况，而不仅仅是两方之间的合作．例如，在多国贸易协定、多方研发合作或复杂基础设施项目中，价值可能来自三方或更多方的协同合作.

Shapley Value in Hypergraph Games

更进一步，我们很自然的想法是，在超图中，能不能推广之前的定理 5（Shapley 值一定在 Kernel 中）和定理 6（关于 Shapley 值与核仁相同）.

很不幸地，定理 5 即使在凸情况下也不成立.

首先注意到:

$$v(S) - \phi(S) = -\sum_{e\in(S,N-S)} \frac{|e\cap S|}{|e|} v(e),$$

其中 $(S, N-S)$ 是所有与 S 和 $N-S$ 都相交的超边集合.

考虑一个有四个玩家 $\{1,2,3,4\}$ 的博弈，$k=3$ 且 $v(1,2,3)=3$；以及 $v(S)=1$（$|S|=3$ 且 $4\in S$）. 因此 $v(1,2,3,4)=6$. 可以很容易计算出 $\max_{1\in S,4\notin S} e(S,\phi)=-\frac{4}{3}$，而 $\max_{4\in S,1\notin S} e(S,\phi)=-1$. 因此，Shapley 值不在 Kernel 中. 由于核仁总是在 Kernel 中，所以 Shapley 值也不是此博弈的核仁，故定理 6 也不成立.

Weighted Majority Games and #P Complexity

接下来我们考虑加权多数博弈和在这个博弈中 Shapley 值的计算复杂性.

首先引入加权多数博弈（**weighted majority games**）. 在这一博弈中，每个参与人被赋予一个正整数权重 w_i，令 $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$，博弈的特征函数定义为

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \sum_{i \in S} w_i > \frac{W}{2} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

此外，还需要引入复杂度类 #P 的概念. 哈密顿回路的判定问题属于 NP-完全问题，但我们并没有考虑计算哈密顿回路的数目的复杂度. 类似地，考虑子集和（subset sum）问题判定版本：给定 m 个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$，令 $M = \sum_{i=1}^{m} a_i$，判定是否存在一个 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的子集 S 使得 $\sum_{i \in S} a_i = M/2$（其中要求 M 为偶数，即 $M/2$ 为整数）. 这也是 NP-完全问题，但我们也并没有考虑过计算满足条件的子集数目的复杂度.

Complexity Class #P

一个简单的观察是，只要能解决计算哈密顿回路的数目（称为哈密顿回路计数版本）问题，自然也能解决哈密顿回路的判定问题，因为只需判断计算出的数目是否为 0 即可解决．同理，计算出子集和问题中满足条件的子集数目（称为子集和问题计数版本）也可以解决子集和问题的判定版本．因而直观上来看，计算问题的数目至少不会比判定版本简单．事实上，即使是 P 问题，例如稳定匹配问题，计算稳定匹配个数也并非易事．基于此我们引入 NP 问题的计数版本所属的复杂类 #P：

定义 (#P Complexity)

#P 是 NP 中判定问题的计数版本，形式化而言，#P 是如下类型问题的集合：计算 $f(x)$，其中 f 是非确定性图灵机在多项式时间内接受的路径数目．

Shapley Value Calculation Complexity

Lemma 5

子集和问题的计数问题是 #P-完全的.

Theorem 9

加权多数博弈中沙普利值的计算是 #P-完全的.

证明.

首先说明加权多数博弈中沙普利值的计算是 #P 问题. 由于在加权多数博弈中联盟效用都是整数，因此 $n!\varphi_i$ 都是整数（用 φ_i 表示参与人 i 的沙普利值），故可以设计出一个非确定性图灵机，其有 $n!\varphi_i$ 条路径是多项式时间内可接受的，因此 φ_i 的计算是 #P 问题.

Shapley Value Calculation Complexity

证明. (续)

由于在加权多数博弈中，$v(S\cup\{i\})-v(S)=1$ 当且仅当 $S\cup\{i\}$ 的权重和大于总权重的一半且 S 的权重和小于总权重的一半，而其余情况下 $v(S\cup\{i\})-v(S)=0$，因此从直观上来看加权多数博弈的沙普利值计算与满足某些条件的子集计数问题是相关的.

给定一个子集和问题的实例，即一组正整数 $a_1,a_2,\ldots,a_m$，构造一个加权多数博弈实例，其中有 $n=m+1$ 个参与人 $N=\{1,2,\ldots,n\}$，其中前 m 个参与人的权重分别为 $w_1=a_1,w_2=a_2,\ldots,w_m=a_m$，最后一个参与人的权重为 $w_{m+1}=1$.

Shapley Value Calculation Complexity

证明. (续)

因此，任意的参与人子集 $S \subseteq N \backslash \{n\}$ 满足 $v(S \cup \{n\}) - v(S) = 1$ 当且仅当

$$\sum_{i \in S} w_i \leqslant \frac{M+1}{2}, \sum_{i \in S \cup \{n\}} w_i > \frac{M+1}{2},$$

注意 $w_n = 1$，且 M 为偶数，故上式等同于

$$\sum_{i \in S} w_i = \frac{M}{2},$$

从而满足 $v(S \cup \{n\}) - v(S) = 1$ 的 S 就是子集和问题条件的解.

Shapley Value Calculation Complexity

证明. (续)

注意到其余情况下都有 $v(S \cup \{n\}) - v(S) = 0$，因此参与人 n 的沙普利值

$$\varphi_n = \sum_{S \subseteq N \setminus \{n\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{n\}) - v(S))$$

就等于 $(|S|!(n - |S| - 1)!)/n!$ 乘以满足子集和问题条件的子集的个数，因此只要能计算出加权多数博弈中参与人 n 的沙普利值即可解决子集和问题的计数版本，从而完成了归约. $\square$

References

On the Complexity of Cooperative Solution Concepts, Xiaotie Deng and Christos H. Papadimitriou, 1994